昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2015年1月1日発行　第53巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2015

特集 科学における〈時間〉
ありふれた存在を多角的に捉える



No.619

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 619 January 2015

科学における〈時間〉

ありふれた存在を多角的に捉える

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2011年/12 省略

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは
2014年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念
/7 モノポールの謎
/8 ベクトル解析の力
/9 重力の謎と魅力
/10 複素解析の視点
/11 応用するトポロジー
/12 場と力の物理イメージ

数理科学臨時別冊一覧

14年/5 パーコレーション理論講義
14年/6 格子模型の数理物理
14年/7 数物系のためのミラー対称性入門
14年/8 情報幾何学の新展開
14年/9 作用素環と無限量子系
14年/10 重力とエントロピー
14年/11 数学的な感覚の探求
14年/12 4次元微分幾何学への招待

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN＆ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN＆ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

January 2015 MATHEMATICAL SCIENCES Number 619

特集／科学における〈時間〉

時間

座標と因果性

佐藤 文隆

1. 心配事を縦に並べる

かつてNHKの気象キャスターで親しまれた倉嶋厚(1924–)は次のような生い立ちを語っている．

「病気がちで引っ込み思案で気の弱い，晩年の子の私は，十七，八歳のころ，ひどい神経症にかかった．錯乱の寸前に見えたと周囲の人があとで話してくれた．その時，父は『お前の心配事を縦に並べて見られないか』と言った．紙の上に一本の時間軸を引き，一番近い心配事から順々に遠い心配事を書いていくと，心配事は縦に並ぶ．『いまのお前は横に並んだたくさんの心配事に攻め立てられて，何もしないでおびえているだけだ．縦に並べれば，当面の敵は一人だ．それと闘って，また次の相手と闘う．闘い続けて，お前がやぶれたとしても，それは仕方がないじゃないか』」(『日本の空を見つめて』岩波現代文庫)

不安に苛まれている息子への父のアドバイスは「悩みを四次元的に書き下してみろ」だったと言える．時間軸を縦にして繋がっている不安を並べ，自分ができるのは光円錐の頂点だけだからキョロキョロするな，と．

2. 座標と因果律

脳裏に去来する想念を時間軸にそって書き下す整理法は人類の知恵であり，物理学も時空間に物事を整理するのを踏襲した．時空座標の中に配置されたものはリアルな現象そのものではなく数字の世界にマップされた一つの表現形である．あっちからきたから，あそこも同質だろうという想念が，一様等方空間を実定する．SI単位系での長さの定義を思い起こすと分かるように，数字は標準現象との比較の無次元数である．

こうした現象の記録媒体としての時空間の人工的様相とは違って，現象自体がもつ因果性にはぬぐい難い実感がある．戻れない過去から未来への流れの中に現在がある．過去と現在の原因があるから結果があるのである．因果世界だから時間があるのだとも言える．

3. 可逆と非可逆

古典力学では原因・結果の区別がなく時間軸には方向がない．運動方程式は時刻 t_1 の事象 $A(t_1)$ と t_2 の事象 $B(t_2)$ の一義的連結がyesかnoかを判定する．$t_1 < t_2$ でも $t_1 > t_2$ でもよい．量子力学では連結の程度を確率で与える．確率は古典では1または0だが，量子では1と0の間の値をとる．状態 A, B がCP対称なら原因・結果の区別がないが，因果律の時間はこの区別に関わって登場する．力学の可逆性とマクロ世界の非可逆性因果律の矛盾を巡る19世末の論争は，眼前にない原子のミクロ世界と人間の能力に取り込まれた眼前の世界との情報量の相異として認識された．こ

うして，素朴実在論的に考えても，物理学には実在の法則と人間という認識主体の存在を介する情報科学の法則が混在することになった［伏見］.

4. 時空間のダイナミクス

一般相対論は時空間が記憶媒体というよりは物理的実体であるとする．あるいはより一般的なダイナミクスの古典的（人間的）近似において非量子的時空間が立ち現れると考えられている．運動速度に上限があるという局所的縛りのもとで，現象の連結（過去・未来はない）を考察するのは時空間の大域的構造の多様性のために複雑化する［土屋］，［原田・椎野］，［松下］.

5. 計測の技術と時間の利用

対象Aの力学変数 a と対象Bの力学変数 b の合成系を考える．合成系の変数が $a(t), b(t)$ のように推移するとすれば，時間パラメータ t を消去して現象は $F(a,b)=0$ という関数関係で表現される．多くの変数を含む系なら $F(a,b,c,d,\cdots,z)=0$ のように与えられる．ここで時計変数を z とすれば，$a=a(z), b=b(z), \cdots$ のように相関が与えられ，a を時計変数に選べば，相関は $b=b(a),\cdots,z=z(a)$ のようになる[1]．実際，世界時の時計変数は天文現象から原子内の振動現象に変更されてきた．この推移は計測テクノロジーの進歩だけでなく，利用する社会インフラとも絡んで変化していくもので，物理学の大きな課題である［細川］，［中平］.

6. アルゴリズムのステップ非対称性と暗号

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけての可逆と非可逆をつなぐ課題としてエルゴード仮説や再帰定理が数学の課題であった．無限大のアポリアの彼方で両者は手をつなぐと．どこか「ヒルベルトのホテル」や「核廃棄物の処理は可能である」といった命題の真否論議を想起させる．

問われているのは問題の立て方であり，科学とは何かに関わっている．暗号の課題は論理演算過程の可逆・非可逆と絡めて新しい視点での数学の課題であろう［林］.

7. 量子力学と時間

量子力学成立時からシュレーディンガー方程式の時間がパラメータか物理量かという問題がある[2]．粒子の量子力学での位置は物理量だが場の量子論での位置はパラメータである．またイベントの時刻は物理量である．最近,「現在」をめぐって *Physics Today* 誌上で興味ある議論が展開されている[3].

7.1 ビームスプリッターの量子力学

ビームスプリッターをユニタリー過程として量子力学で扱うには場の量子論の真空状態の導入が不可欠になる（文献 4) の 13.1 節参照）．干渉縞よりはビームスプリッターが量子力学のイメージにはより相応しい［筒井］.

7.2 1次元場の理論と粒子のシュレーディンガー方程式

物理変数の時間の他にパラメータ時間を持ち込んで，パラメータに関する対称化を行うと，シュレーディンガー方程式が導出される．このからくりは文献 4) の 3.4.2 節参照.

7.3 膨張宇宙と時間

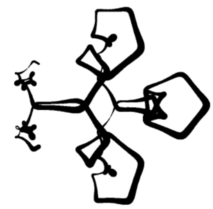
物質と時空の合成系のダイナミクスの量子化を考える．膨張宇宙の物理変数である膨張因子が，古典的に振る舞うとしてボルン–オッペンハイマー近似をすると残りの物理変数に対するシュレーディンガー方程式が導出され，膨張因子が時間に相当することになる[5].

参考文献

1) 佐藤文隆：第 7 章 3 節 時間の多様性,『量子力学は世界を記述できるか』（青土社），2011.
2) 佐藤文隆：時間と量子力学，パリティ（丸善），2005 年 2 月，20(2), pp.30–36.
3) N.D. Mermin, *Physics Today (AIP)*, vol.**67** (2014), No.3, pp.8–9，及びその後の投書欄.
4) 佐藤文隆：『量子力学ノート—数理と量子技術』（サイエンス社），2013.
5) 佐藤文隆：第 9 章 膨張宇宙論から見た時間,『量子力学のイデオロギー』（青土社），2011.

（さとう・ふみたか，京都大学名誉教授）

時間の社会インフラ
暦，標準時とGPS



細川 瑞彦

1. 暦

人の生活の中で，時間と空間はその重要な基盤であることに異論は少ないであろう．空間の基準のために，緯度，経度のような座標系が，あるいは古来の地名，集落，地番が用いられている．これと同じように，時間についても過去から現在，未来に至るその流れを体系的に記述する必要がある．科学的には単位を定め，その何倍かを示すことで時の間隔を測ることができる．後で詳述するように，現在は国際的に認められている単位は「秒」であり，量子物理に基づいたものになっている．

しかしながら，より生活に密着した長期間での記述に便利な体系が求められてきた．これが**暦**である．手元にある大辞林[1]で「暦」を引くと，

1. 時の流れを年，週，日，などを単位として区切った体系，暦法．
2. 一年間の月日，七曜，祝祭日，干支，月齢，日の吉凶などを日を追って記したもの．カレンダー．

とある．これから分かるように，暦の基本単位となるのは，身近な天体の周期であり，地球の太陽に対する公転周期，月の満ち欠け（朔望）の周期，地球の太陽に対する自転周期，の3つが主なものである．それぞれ，いわゆる年月日に相当するが，正確な表現は**太陽年**（回帰年ともいう），**朔望月**，**太陽日**である．これらの周期自身，年や季節単位で周期変動するので，変動要因を補正した平均値を使うことで長期に有効な値が求められる．

周期について考えるときには，何に対する，ということが重要で，太陽に対してか，恒星に対してか，などでこれらの周期は思いの外大きく変わる．物理的には，恒星や最近ではクエーサーの観測で決められる天球座標が慣性系と考えられ，これに対しての周期が重要であるが，暦で重要となる周期は，皆これとは異なる．地球の自転について，太陽に対する太陽日より，天球に対する恒星日の方が約4分短い．また，月が地球の周りを天球上で一周する公転周期は約27.3日だが，その間に地球が公転するため，天球上での太陽の動きに追いつく分，暦で重要となる新月から新月までの朔望月の周期は約2.2日長い29.5日ほどになる．地球の公転にしても，地軸の傾きが25800年で回転することにより歳差[2]と呼ばれる天球上の動きがあり，球面天文学の言葉で言うと一年間に春分点が黄道上を一周の1/25800だけ動くため，春分点を基準とする太陽年と，天球に対する恒星年では1年の長さに約20分24秒の違いがある．天体の周期と言っても，人間社会にとっては，厳密に力学的，絶対的な周期より，生活に関わる対象間の相対的な周期のほうが重要，ということであろう．このため，暦においては，太陽年，朔望月，太陽日，が重要となり，時の流れを記述する体系である暦は，ごく例外的なものを除けば，**太陽暦**，**太陰暦**，**太陰太陽暦**の3種類に区分される[3]．

太陰暦が現在も使われている代表としては，イスラム教社会のヒジュラ暦が挙げられよう．朔望月29.5日に基づき29日の小の月と30日の大の月をほぼ交互にして，12カ月，およそ354太陽日を1年とする暦法である．あくまでも朔望月が基準であり，この暦法では年が太陽年とずれていくままである．宗教上の理由によることが大きいと聞くが，季節変化が少なく乾燥して晴れる日が多く，夜の活動を月に大きく影響されてきた地理的な事情も大きいと思われる．

太陰太陽暦は，中国暦やユダヤ暦などがあり，かつては多くの国，民族に用いられてきた．現在では，日本や中国などで旧暦と呼ばれているものが有名である．基本的には，朔望月の周期からずれないよう，ほぼ交

互に大の月と小の月を繰り返し，12カ月を通常の1年とするが，19年に7回（ギリシャの発見者にちなみメトン周期と呼ばれる），閏月を入れることにより，この暦法における年が太陽年とずれていくのを補正する仕組みである．メトン周期での補正はかなり正確で，この暦法の年と太陽年が一日ずれるのに229年かかるとされている．さらに補正の精度を上げたものとして，カリポス周期やヒッパルコス周期がある．

太陽暦は，人工光で夜間活動を月に依存しなくて済むようになった現在，世界で最も広く使われている．最もポピュラーなのが現在日本でも使われている**グレゴリオ暦**であろう．1528年グレゴリオ13世によって定められたこの暦は，1年を12カ月とし，そのうち7カ月を31日の大の月，5カ月を30日または28日の小の月とし，平年の1年を365日としている．その上で，4年に一度の閏年の2月を29日とすることで366日とし，そこから400年に3回閏年をなくす（直近では1900年や2100年が閏年ではなくなる）ことで，長期的に1年の平均の長さを365.2425日とする暦である．この暦法において，1カ月は朔望月の周期と近く定められているが，ずれていくことの補正は行われないので，両者の関係は絶ち切られている．現在の天文観測によると1太陽年は365.2422日なので，この暦法の1年はかなり実際の太陽年に近い．

これらの暦は，それぞれに太陽日を単位として，朔望月や太陽年を正確に記すものである．それぞれの暦には，宗教的な行事や，中国暦のように季節を表すなど，文化，実用的な特徴がある．これらに加えて，もう一つ，暦には大きな役割があった．それは日食と月食の予測である．古代の中国暦でも正確な暦が周辺国に対する皇帝の権威の象徴であったそうだし，日食月食の予測の重要さは，渋川春海と貞享の改暦を描いて映画化もされた『天地明察』[4]でも良く示されている．

新月，満月時に日食月食が必ずしも起きないのは，天球上の太陽の通り道である黄道と，月の通り道である白道が，ぴったり重なっておらず5度ほど傾いていて，さらにそれぞれが天球上を異なる速さで動くことによる．運動方程式も天体力学も知られていなかった頃から，日食と月食はかなり正確に予言されていた．古代バビロニアで，一連の日食と月食は18年11日と8時間で繰り返す，という周期が発見されていて，現在，これは**サロス周期**と呼ばれている．これは現代の精密観測から見ると，新月から新月への期間である朔望月の223倍の期間が，黄道と白道の位置関係の変化の指標となる周期（交点月，食年，近点年）の整数倍と，有効数字5桁程度で非常によく一致する，という偶然によって生まれた周期である．もちろん現在では，精密な観測と天体軌道計算で，この周期より遙かに精密な日食月食の予報が可能である．

18年というのは人の一生の中でも数回しか繰り返せない周期である．さらに端数の8時間というのが微妙な効果で，1サロス周期後の日食は，経度にして約120度離れた地域で見えることになり，前に起きた地域では見えない．しかしこれを3倍すると，およそ54年と1カ月後に，同じ地域で同じような日食月食が見えることが分かる．このサロス周期の3倍にはエクセリグモスという周期名がつけられている．近年の日本の例でいうと，2012年5月に，日本各地で金環日食が観測されたが，その54年前，1958年4月に八丈島など日本近辺でやはり金環日食が観測されている．同一地域で，ほぼ人の一生に近い周期で同じような日食と月食が見られるという偶然の周期が地球には存在していて，運動の法則が知られる遙か昔から，正確な暦をつくる営みの中でその周期が発見されているのである．

2. 標準時

暦がある程度長期的な時間の記述であるなら，その基本の精度を短期的につくり，空間的に広範囲において長期的な記述の基礎となるのが**標準時**であろう．古代においては日時計，砂時計，水時計（漏刻）を見るかぎり，それほど正確な時間の標準が必要とはされていなかったのではないだろうか．特に日時計で測られる地球の自転は時間の単位の基礎で，これに基づいて決められる時刻系は，今に至るまで世界時と呼ばれている．

正確な時間の必要性はいつ頃から高まってきたのだろうか．一つの大きなきっかけは，人間がその活動範囲を広げ，大旅行を始めたことだったのではないだろうか．大航海時代，大海原の上で，星や太陽の高度で緯度は分かっても，正確な時間を知ることができないと自分のいる経度を知ることができず，大洋の中の迷子になってしまう，ということがあり，その問題解決のため，**クロノメーター**が開発された経緯が，『経度への挑戦』[5]に詳しく書かれている．同書には，この頃，天体の運行の観測のみから正確な時刻と，そして観測者の経度を得ようという試みがあったことも描かれている．また，19世紀に標準時が制定され，米国そして英国で標準時の通報が始まったのは，鉄道の発達に伴

い，線路上のすべての駅で同期した時刻が必要となったためだそうである[6]．真空容器に入れた振り子時計，そして水晶時計と精度は向上し，地球の自転のふらつきも見えてくるようになった．

時間の測り方には2種類ある．現象の繰り返しを数えるのと，物体の運動に対し，運動方程式を解いて現象を予言し，それが実現する時を測ること．前者では，例えば振り子時計や水晶時計，さらには原子時計も物理法則からその繰り返しが等間隔と信じられているが，地球の自転については特に原理的保証のない経験的なもので，実際，数年に1秒くらいの割合で，海洋潮汐や，地球大気流の大規模変動により不規則的なずれが生じている．原子時に対しこのずれを補正するのが**閏秒**である．後者は先の言い方では抽象的だが，実例に沿って具体的に言うと，太陽，月，惑星の運動をすべて解き，星々の南中時刻と，日食，月食，星食を予言し，それが起こることを時刻とセットで観測することで時を測る，というものである．これはある意味，18世紀に当時の天文学者が確立しようとしてできず，ハリソンのクロノメーターに後れを取った方法[5]だが，20世紀に入って，ようやく機が熟してきていた．サイモン・ニューカム[7]らによって19世紀後半から20世紀初頭にかけて築かれた太陽系天体の運動理論で太陽，月，惑星の位置を予測計算する方法が高精度に確立された．この天体力学によるイベント予測と実際の観測から時刻を定める時刻系は**暦表時**と呼ばれる．暦表時は，従来の世界時より精度の高い時刻系として1950年代に**国際天文学連合** IAUで認められた．長期的な精度は10桁以上と評価されている．地球の自転に基づく世界時が特に力学的な根拠を持たず，現在の観測によると精度8桁目のあたり，数年に1秒のレベルで，潮汐や気象，地殻変動などにより正確な予測が難しい変動があることと比べると暦表時は2桁以上良い．暦表時の正確さは国際度量衡委員会も認めることになり，1956年から1967年まで暦表秒が**SI秒**の定義として用いられることになった[8]．

だがしかしこの頃，**原子時計**が開発された．原子の量子力学的な共鳴周波数を用いる，という点では，繰り返しを数える方法に舞い戻ったことになる．1955年に開発されたエッセンの**セシウム原子時計**は10桁以上の精度，星食や月食を待たずに時刻を知ることができる．ただし開発されたそのときには，セシウムの共鳴周波数は1秒に何回振動するのか誰も知らなかった，ということは注目に値する．その値を知るために，暦表時とセシウム原子時計との比較が3年続けられ，その結果1958年に得られた共鳴周波数は 9192631770 ± 20 Hz である[9]．1967年，国際度量衡総会で，秒の定義は暦表時によるものから，原子時計によるものへの変更が決定された．その定義は，

> 「秒は，セシウム133の原子の基底状態の二つの超微細構造準位の間の遷移に対応する放射の周期の 9 192 631 770 倍の継続時間である[8]」

というものである．ただし，その後の原子時計の精度向上に伴い，より厳密な注釈を加える必要が生じ，SI単位それ自身には，「この定義は温度 0 K のもとで静止した状態にあるセシウム原子に基準を置いている」という補則が加わり，国際原子時の単位となる秒は，地球の自転と重力による**相対論効果**を考慮し，地球ジオイド面上でのSI秒が採用されている．

この定義の変遷は科学的に興味深いものがある．最初に，地球の自転を基準にしていた頃は，いわば地球が原器であり，地球が見えないような宇宙の彼方では，時間の単位と標準時は直接知ることができなくなることになる．次に，暦表時は，太陽系を原器とした，とも見られなくはないが，太陽と，地球を始めとする惑星の質量，その位置と速度など，力学系としての太陽系の初期条件が与えられれば，力学法則が同じ宇宙の中では，1秒の定義を理論的に示すことができる．原子の量子遷移による定義はさらに原器主義から離れ，量子力学，原子物理学が宇宙普遍のものであると信じるならば，宇宙のどこにいようともセシウム原子と適切な機器さえあれば，1秒の定義は実現できることになる．国際単位系SIの定義にはすべての基本単位で，ただ一つの原器から普遍的な物理法則へ，という大きな流れがある．

いささか原理的な話に深入りしたが，現実の成果として，原子時計はそれまでの時間はもちろん，長さや重さなどでは到達できない，高い計測精度を実現した．現在では市販のセシウム原子時計でも，絶対的な正確さが 10^{-12} 台，相対的な安定度が 10^{-14} 程度のものがあり，研究機関による開発では，セシウム原子時計で 10^{-16} 台，最近開発が進む**光原子時計**では，10^{-18} 台の正確さが期待されている．このような高精度は，相対論効果を考慮することが必須となる．例えば速度による時間の延びは，速度の2乗に比例するが，秒速3 kmの人工衛星では 5×10^{-11}，秒速3 mという人の小走り程度の速さでも 5×10^{-17} 程度の相対論効果が現れる．また重力による時間の延び，いわゆる重力赤

方偏移効果では，地球表面付近では 7×10^{-10} の効果が存在し，1 m 高度が変わるごとに，相対的に 10^{-16} 程度の時間の延び縮みが起きるからである[10]．これらに加え，地球近傍で離れた時計の時刻を比較する際には，我々が自転する地球という回転座標系の上にいるために生じる，サニャック効果と呼ばれる相対論効果もある．回転の角速度，回転中心からの時計の距離と，時計同士の回転軸に対する角度の開きに比例する量だが，例えば地表北緯 35 度で，経度が 15 度離れた時計の時刻比較では，回転による効果を約 6 ナノ秒補正する必要があり，衛星を経由する大陸間の時刻比較では，100 ナノ秒を超える補正が必要になることもある[11]．

次に，標準時の実現方法を説明しよう[12,13]．この分野の専門家の間では，標準時は「発生」する，という言い方をする．時間自身は発生できないので専門外の方からは変に思われるが，時間は存在していても，そこに目盛りを刻む行為，そしてできる目盛りは，人が作るものだから発生という言葉が使われている，と考えると納得できそうである．その標準時の発生であるが，正確で，狂わず，故障も絶対せず，寿命が永遠，という時計が 1 台あれば事足りるだろう．ただしその一方，そんな時計は原子時計でも実際には存在し得ない，ということも容易に想像頂けよう．ではどうするか．一言で言うと，多数の原子時計の協力，である．それも大きく分けて 2 つのタイプの原子時計が用いられる[14]．一つは安定な原子時計，通常は市販商用のものが多く使われる．もう一つは，**一次周波数標準器**と呼ばれる，秒の定義をいかに正確に出すかに特化した原子時計である．前者についてよく使われるのは 1 台 1000 万円程度のセシウム原子時計と，1 台 3000 万円程度の水素メーザー原子時計である．後者については市販のものはなく，高度な標準機関が自ら開発した，原子時計の持つ様々な周波数変動要因をすべて自己校正することで正確さに特化したもので，国際的に認められたものは現在世界で 10 台程度である．

先進的な標準機関の例では，標準時の発生の原理は次のようになる．まず数台から数十台の商用原子時計を温湿度等管理された部屋で運用し，互いの時刻差を定期的に計測する．その計測データを使って重み平均を取り，1 台のみより数倍安定性の高い仮想的な時計を計算機上でつくる．この安定な仮想時計に，さらに外的データにより正確さも得られるよう補正を行って，正確さも安定さも兼ね備えた理想の時計とする．その計算上の理想時計の時刻，周波数を実現するため，実在の原子時計から 1 台を選び，その実際の出力信号に対し，計算機上の理想時計にできるだけ良く一致するよう時刻，進み方（周波数）を物理的に補正した実信号をつくる．このようにして得られた出力信号を，その国の時刻と周波数の信号をその国の標準時，標準周波数とする．

先に「外的データにより正確さを得る」と言ったが，これには通常，2 つのデータが使われる．一つは，一次周波数標準器を持つ機関が，それを運用して得た正確さのデータである．もう一つは，約一カ月遅れで国際度量衡局から公表される**国際原子時，協定世界時**のデータであり，そこから，約一カ月前にその機関の標準時のずれを見て行う補正は，頻度の差はあれ，ほぼすべての機関で行われている．

では国際度量衡局から約一カ月遅れで公表されるデータはどのように決められるのか．これは国際原子時の場合，30 日を一区切りとして，世界中の協力する標準機関の原子時計，総数およそ 400 台を国際時刻比較したデータと，その間に運用データが報告されたすべての一次周波数標準器のデータを集めて，それらを総合し，安定性と正確さの両方を兼ね備えるよう決められている．ちなみに 400 台以上の原子時計の平均は，30 日間隔での周波数変動は 10^{-16} 台という高い安定度と評価されているが，その絶対値は正しい秒の定義からは，10^{-13} 台のずれが観測されている．そのずれを計測し，補正するための一次周波数標準器も，現在 10 台以上が国際認証されていて，その正確さは多くが 10^{-16} 台に達している．このようにして得られた国際原子時と，地球の自転による世界時との差も，各国の天文，測地機関で計測されており，国際地球回転・基準系事業（IERS）にデータが集約され，半年に一度，閏秒調整をするかどうかが判断される．これまでの閏秒調整は，挿入のみで，以前は毎年行われることもあったが，近年では 7 年も調整のなかった期間があるなど，地球自転の不規則性が見て取れる[13]．国際原子時は，セシウム原子時計の周波数測定結果が出た 1958 年の 1 月 1 日を基点として発生し続けられており，自転のずれの総計として国際原子時と協定世界時の差は 2014 年時点で 35 秒となっている．この数年に 1 秒，10^{-8} 程度の不規則変動については，数年程度以内の短期的変動の原因は，そのほとんどが大気の影響であることが分かっている．より長期的な要因としては，海洋潮汐の影響が大きいと言われているが，地殻変動やマントル対流の影響なども考えられ，定量的にはまだ解明

されていない．

筆者の属する情報通信研究機構（NICT）では常時20台以上の商用原子時計が動いており，時刻差データを毎秒計測し，また不定期に，自主開発した原子泉型一次周波数標準器を調整し運用して，周波数標準値を決定し，日本の標準時を発生させている[13]．これら標準時，標準周波数は，電波時計で利用できる**長波標準電波**，電話回線，インターネットなどを利用して，日本国内誰でも利用できるよう配信されている．電波時計に使える長波標準電波は，現在では英独米中日の5カ国で送信されている．また，標準時を構築する時計データは国際度量衡局に提出し，国際原子時の決定に貢献している．国際原子時への各原子時計の寄与率は毎月公表されているが，NICTの原子時計の寄与率合計は7～10%程度で，おおよそ世界第2位となっている．この寄与率の不動の1位が，**GPS**の時刻管理を担当している米海軍天文台であり，100台以上の原子時計を有し，寄与率30%前後を保ち続けている．

3. GPS，原子時計が拓いた新たな社会インフラ

米海軍天文台の話が出たところで，最後のGPSの話に移ろう．最近ではカーナビから，スマートフォンの地図ソフトまで，GPSという言葉はすっかり日常に融け込んだ感があるが，GPS（Global Positioning System）というのは，米国のシステムに対する固有名詞であり，一般には，**GNSS**（Global Navigation Satellite System，**全地球航法衛星システム**）という．GPS以外のGNSSには，ロシアのGLONASS，欧州のガリレオ，中国の北斗が挙げられる．この中で全面的実運用が行われているのはGPSとGLONASSのみで，北斗は衛星がまだすべて揃わず限定的な運用，ガリレオは数機の衛星を上げたのみで開発中である．また，地球全体ではなくある地域のみをカバーする航法衛星システムには，開発中の物を含め，フランスのDORIS，インドのIRNSS，日本の準天頂衛星システムがある．

全地球航法衛星システムGNSSの原理は以下のようなものである[15]．まず地球を周回する人工衛星を多数用意する．これらの衛星には高精度の原子時計と，その時計を基準とした衛星の時刻や軌道の情報を送信する機材が装備されている．地上には，これらの衛星を管理するシステムがあり，軌道を精密にコントロールし，衛星間の原子時計が同期し続けるよう，原子時計を

もコントロールする．最後に，このシステムを利用する受信器を持つユーザーがいる．受信器により同時に4つ以上の衛星からの信号を受け取り，各衛星の軌道情報と，発信時刻を得る．電波信号は，真空中では光速で伝わるので，受信器はこの情報から，各衛星の位置，及びユーザーから各衛星の距離の差を得ることができ，それを用いてユーザーの位置と時刻を決定する．なぜ4つの衛星からの情報が必要かは次のように考えると少し分かりやすい．もしユーザーの受信器がやはり高精度原子時計を持っていて，衛星の原子時計と同期していれば，発信時刻と受信時刻から直接衛星までの距離が出せる．その場合，3次元空間の位置を知るには3つの衛星からの信号を受信すれば事足りる．しかし通常，ユーザーの受信器には高価な原子時計は装備できないので，もう一つ他の衛星の信号を受けて，時刻差だけの4つの方程式を連立させることにより，ユーザーの空間と時間が両方得られる，という仕組みである．

この原理を実現させるには，いろいろな必要条件が出てくる．まず，常時4つ以上の衛星が地球上のどこでも見えなければいけない．衛星の高度は，地表から見ておよそ一日に1周するあたりが管理の面から好まれている．慣性系で一日に2周するくらいだと，自転で追いつかれる分を含めてちょうど良い．そのような高度は地表からおよそ2万kmであり，GPSやGLONASSは，この高度に予備を含めると24個からそれ以上の衛星を周回させている．また，目標測位精度を仮に1mとすると，軌道の精度は当然それ以上が求められるし，時刻の同期にも常に1億分の1秒レベルの同期が求められる．一日（およそ10万秒）に1回地上施設により時刻合わせをすると考えると，最低でも13桁の精度があって初めて可能になる技術，ということが分かる．当然，相対論効果の補正は必須となるし，実際に補正されている[15]．

GPS，GLONASSは，1970年代頃から米ソで，軍事システムとして開発が進められたものであるが，現在ではカーナビや航空管制，船の運航など様々な民生活用が行われている．実は先に述べた国際原子時の構築にもGNSSは大きな寄与をしている．前節では，原子時計同士の国際比較についてはあえて触れなかった．しかし一つの研究機関内の原子時計は簡単に比較計測できても，全世界の400台以上の原子時計の時刻比較はどうやって行うのだろうか．実は十分な精度の時計の国際的な比較が可能になったのはGPSのシステムの整備が進んだ1980年代後半からである．その基本

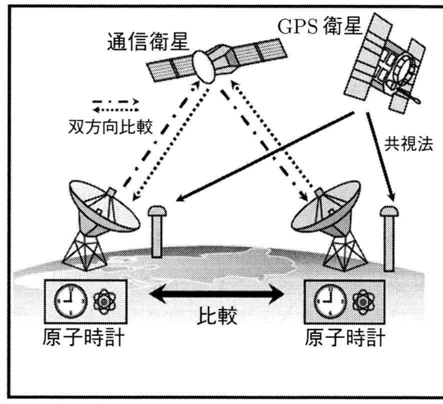


図1　衛星を用いた国際時刻比較の原理.

原理は，**共視法**（common view）と呼ばれる．GPSの衛星運行スケジュールを知り，例えばA機関とB機関とで，いつ，どのGPS衛星の信号を受信するかを定める．GPS衛星の信号には原子時計の時刻情報があるため，この同時測定で，GPS衛星とA機関，GPS衛星とB機関の原子時計の時刻差を求めることができる．この2つの測定からGPS衛星の時刻が打ち消されるように引き算を行い，GPS衛星によらないA機関とB機関の原子時計の時刻差を求める，というものである．これによって日本など欧米から離れた原子時計は初めて国際原子時に寄与できることになった．当初は10ナノ秒程度の精度であったが，GPS信号の搬送波を利用する方法や通信衛星を用いた双方向比較など様々な技術開発[14]により精度を向上させた（図1）．現在では多くの機関でサブナノ秒の精度での比較が日常的に行われている．

GPSが当初軍用であったことを強く感じさせられたのが，2000年5月の**SA**解除である．SAとはSelective Availabilityの略で，民間が利用可能な信号に，意図的に誤差データを付け加えて精度を落とす操作である．2000年当時，筆者は日本標準時を担当する通信総合研究所（現NICT）の標準計測部に所属していたが，国際時刻比較のために当部で計測していたGPS信号のグラフが，それまではSAによりかなりデータが広がってきたのが，SA解除によりきれいな細い線になったのを見て驚いた覚えがある．当時のクリントン政権がGPSの民生利用推進のためこれを行い，さらに後のブッシュ政権では2007年に衛星へのSA機能搭載も止める，と発表したため，今後SAの操作はないものと思われる．

このように，GPSを始めとするGNSSは，現在では社会に欠かせない時のインフラとなっている．社会

生活ばかりでなく，例えば先の大地震で地面がどのように移動したかを精密に測るなど，測地学の重要な手段となっている．また，GNSS の誤差要因には，先に述べた原子時計，軌道と並び，電離層や大気による電波の**伝搬遅延**がある．これらを正確に補正することが GNSS の運用には欠かせないが，これを逆手にとって，GNSS の衛星からの信号を用いて，電離層の状態や大気中の水蒸気成分を測定する，という利用も進められている．前者は**宇宙天気予報**に役立てられているし，後者は **GPS 気象学**という一分野を成している．

時を測り，天体の運行を知り，社会に役立てていこうという長年の努力が，振り子時計，航海用クロノメーター，水晶時計，原子時計という正確な時計の開発につながり，それらが社会を革新し，また現在では原子時計を宇宙に打ち上げて，汎地球的な位置と時刻を知るインフラを作り上げるまでになり，そのインフラがまた社会サービスと学術の新たな展開を生みつつある，ということを見て頂けたら幸いである．

参考文献

1) 松村明編，『大辞林第三版』，三省堂，2006.
2) 福島登志夫，『天体の位置と運動』，シリーズ現代の天文学 13，日本評論社，2010, p.67.
3) 岡田芳朗，『日本の暦—旧暦と新暦がわかる本』，KADOKAWA/中経出版.
4) 冲方丁，『天地明察（上下）』，角川文庫，2012.
5) デーヴァ・ソベル，『経度への挑戦』，角川文庫，2010.
6) W.J.H. アンドリューズ，“時計年代記”，時間とは何か？，日経サイエンス，2011, pp.74–84.
7) ウィリアム・カーター，メリ・カーター，パリティ，丸善，2009, Vol.24, No.09.
8) 国際単位系(SI)，国際文書第 8 版，国際度量衡局編，2006，訳・監修(独)産業技術総合研究所．https://www.nmij.jp/library/units/si/R8/SI8J.pdf (参照 2014-09-08)
9) Tony Jones (松浦俊輔訳)，『原子時間を計る』，青土社，2001.
10) 細川瑞彦，“人工衛星と相対論効果”，日本機械学会誌，2006, Vol.109, No.1054, pp.32–33.
11) 細川瑞彦，“精密周波数計測における相対論効果”，電気学会論文誌，2008, Vol.125, No.8, pp.1164–1172.
12) 花土ゆう子，“信頼性と正確さを向上させた日本標準時システム”，応用物理，2004, Vol.73, No.12, pp.632–635.
13) NICT 日本標準時グループホームページ，http://jjy.nict.go.jp/
14) 電気学会 125 年史，一般社団法人 電気学会，2013, pp.444–450.
15) ニール・アシュビー，“相対論と GPS (全球即位システム)”，パリティ，丸善，2003, Vol.18, No.06, pp.18–26.

（ほそかわ・みずひこ，情報通信研究機構）

素粒子実験での時間測定の果たす役割

中平　武

1. はじめに

素粒子実験では，物質の最小構成単位を観察する．なじみのない人からすれば,「分子や原子すら観ることが難しいのに，さらに5桁以上小さな原子核・素粒子はどうやったら観測することができるのか？」と思われるであろう．ところが意外なことに，実験において“単独の粒子（の反応）を観る”という点でいえば，原子や分子の反応よりも原子核・素粒子の反応のほうが捉えやすい．

例えば，化学反応している一つの分子・原子の動きを観るのは難しいが，原子核・素粒子の場合には，学生実習のテーマにも取り上げられる身近な材料を使ってできる手作りの霧箱でも，一つの宇宙線粒子の飛跡や，一つの原子核が崩壊して一つの α 粒子を放出する様子が観察できる．

とはいっても，最先端の素粒子実験は，質量の大きな素粒子が生成し得る条件を実現するための大型の粒子加速器，発生した高エネルギーの粒子を観測するための大型測定器，膨大の数の背景事象から目的の反応を選択する大規模な電子回路・計算機を駆使した大規模なものとなる．

ここでは，素粒子の世界を観るために“時間測定”が用いられている事例を紹介し，極小の世界で起きている量子力学的な現象に迫る実験の一端をお伝えしたい．

2. 素粒子実験での解析手法

素粒子の“**標準模型**”は，物質を構成最小単位と考えられているクォークとレプトンおよびそれらの反粒子，素粒子の相互作用を媒介するゲージボソン，素粒子に質量を与えるヒッグス粒子から構成されている．ただし，クォークは単体では存在せず，クォーク–反クォークの対からなるメソン（中間子）や，3つのクォークの組合せからなるバリオンとして存在している．

これらの粒子の多くはごく短い寿命をもち，生成されてもすぐに別の粒子に崩壊してしまうので，検出器によって直接捉えることが難しい[1,2]．例えば，図1は，電子–陽電子衝突型加速器 KEKB[3]

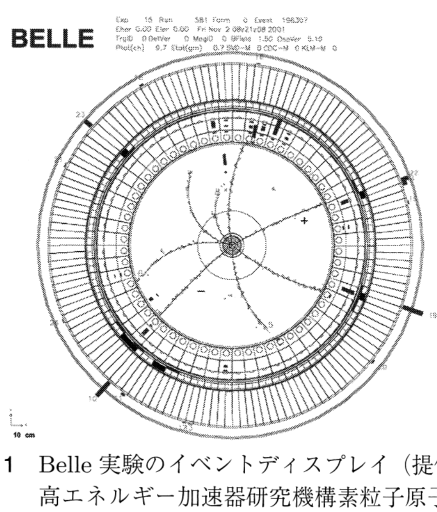


図1　Belle 実験のイベントディスプレイ（提供：高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所）．

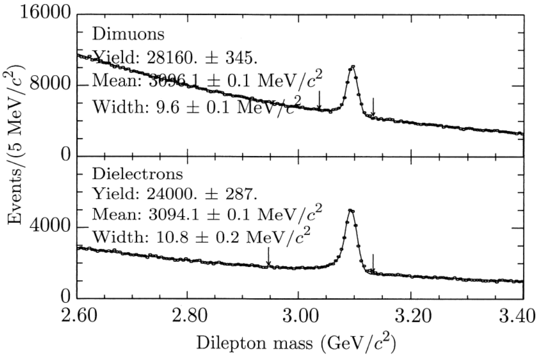


図2　Belle 実験で J/Ψ を再構成した例（上：$J/\Psi \to \mu^+\mu^-$，下：$J/\Psi \to e^+e^-$）[5]．

を用いたBelle実験[4]が，電子–陽電子が対消滅した反応を捉えた様子である．図中央で起きた対消滅反応により B メソンなどの粒子が生成されるが，それらの崩壊から生じる，電子・陽電子（$e^{\pm}$），ミューオン（$\mu^{\pm}$），陽子（p），パイ中間子（$\pi^{\pm}$），K 中間子（$K^{\pm}, K_L^0$），光子（γ）といった長寿命の粒子だけが検出器まで到達して飛跡を残す．つまり検出器が捉える“反応の終状態”に現れて，運動量などの物理量を直接測定できるのは，これらの長寿命の粒子だけである*1)．

その他の多くの短寿命の粒子は，終状態の粒子の運動量とエネルギーから特殊相対論的運動学によって再構成して探していく．例えば，中間状態に質量 M の親粒子が生成されたのち，終状態の n 個の粒子に崩壊した場合を考える．親粒子の静止系 = 終状態の n 個の粒子の重心系で，終状態の各粒子のエネルギー・運動量をそれぞれ，E_i, P_i $(i = 1, \cdots, n)$ とおくと，四元運動量の保存則から $(Mc^2, 0) = \sum_i^n (E_i, P_i c)$ が成り立つ*2)．

実験の解析では，この逆の計算をする．検出器が捉えた終状態の粒子の中から，電荷の和などの条件にあった粒子 n 個の組合せのすべてに対し，それらの運動量とエネルギーの測定値を用いて，重心系での“静止質量”を計算する．例えば，図 2 は，Belle 実験で同じイベントの終状態に観測された μ^+ と μ^-（または e^+ と e^-）の組合せに対して“静止質量”を計算したものの分布である[17]．このとき，それぞれ別の親粒子の崩壊で生じた無関係な μ^+ と μ^- の組合せに対しては“静止質量”はランダムな値になり，広がった分布になる．それに対して，本物の一つの親粒子の崩壊で生じた μ^+ と μ^- を選んだ場合には，親粒子の質量の値に一意に決まるので，観測例を増やして“質量”の分布を見るとランダムな分布の上に親粒子の質量のところにピークができる．図 2 では，J/Ψ という粒子の質量（3.097 [GeV/c^2]）にピークが見える．このピークを見つけることで親粒子 J/Ψ の存在と，その崩壊反応 $J/\Psi \to \mu^+\mu^-, e^+e^-$ の存在が確認できる．

この質量ピークをつくる終状態の粒子の四元運動量を合成して，親粒子の四元運動量も計算できるので，さらに別の粒子と組み合わせて“質量”の分布を見ることで，さらに親の親粒子を探索することもできる．

3. 時間測定による粒子の識別

四元運動量から静止質量を再構成して親粒子を探索するには，終状態の全粒子のエネルギー・運動量を求める必要がある．荷電粒子は，強磁場の下でローレンツ力によって飛跡が曲げられるときの曲率半径から運動量 P を測定することができる．粒子のエネルギーについては，カロリーメータと呼ばれる測定器で直接測定する場合もあるが，終状態の粒子の質量 m が既知であれば，測定された運動量から $E^2 = m^2c^4 + P^2c^2$ で求められる．したがって，終状態の粒子の種類が同定できればよい．電子とミューオンは物質との相互作用が特徴的であるので容易に同定できる．しかし，荷電パイ中間子（$\pi^{\pm}$）と荷電 K 中間子（$K^{\pm}$）は，ともに“強い相互作用”をする荷電粒子のため物質との相互作用がよく似ており，この両者を区別するには工夫が必要である．そのための手法の一つとして“時間測定”が使われている．

約 1 [GeV] 程度までの運動量が分かっている粒子の識別に使われるオーソドックスな方法が **TOF**

*1)　飛跡検出可能な粒子の種類は実験手法によってことなり，原子核乾板などではより短寿命な粒子の飛跡検出が可能．

*2)　c は光速．

(**Time of Flight：飛行時間**) 法である．粒子の発生点からある程度離れた距離 L [m] のところに置いた粒子検出器に到達するまでの時間を T [s] は，粒子の質量を m [GeV/c^2] として，

$$T = \frac{L}{c}\sqrt{1 + \frac{m^2c^4}{P^2c^2}} \tag{1}$$

となる．$\pi^{\pm}, K^{\pm}$ の質量はそれぞれ 0.140 [GeV/c^2], 0.494 [GeV/c^2] であるので，例えば $L = 1$ [m], $P = 1.2$ [GeV/c] のときには両者の時間の差 ΔT は，約 420 [ps] である．したがって，プラスックシンチレータなど応答の早い検出器を用いて到達時間を 100 [ps] 程度の分解能で測定すれば，3σ 程度の識別*3) が可能となる．式 (1) では，質量が軽い粒子や運動量が高い粒子に対しては，一定の値 $T \simeq L/c$（光の伝搬時間）になってしまい，TOF 法での粒子識別は難しくなる．

4. 軽すぎる素粒子＝ニュートリノ

素粒子の中でも 3 種類のニュートリノ（ν_e：電子ニュートリノ，ν_μ：ミューニュートリノ，ν_τ：タウニュートリノ）は極端に質量が小さく，これまでの実験の測定限界以下である．なぜニュートリノは他の素粒子より極端に軽いのかは“標準模型”を越える新しい物理法則へのヒントかもしれない．ニュートリノの質量測定は，素粒子の基本的な性質の測定という意義にとどまらず，新しい知見をもたらし得る．

最新の直接測定実験によると，例えば ν_e の質量は 2 [eV] 以下である[2,6]．さらに，ニュートリノのスピンの向きは運動方向に対して必ず一定の向きに決まってるという実験的事実から，ながらく“標準模型”ではニュートリノの質量は 0 とされてきた．しかし，“標準模型”の枠を越える**ニュートリノ振動**という新しい物理現象が 1998 年に Super-Kamiokande 実験（SK）[7] による大気ニュートリノ*4) の観測で世界で初めて発見された[8]．

*3) 間違える確率が約 0.3%．

*4) 宇宙線と大気の反応によって生成される天然のニュートリノで ν_μ が主成分．

ニュートリノ振動とは，ある種類のニュートリノが時間の経過とともに別の種類のニュートリノとして観測される現象である．例えば，エネルギー E_ν をもつ ν_μ は時間 t [s] 経過すると，量子力学の効果により ν_τ として観測される可能性が生まれ，その確率は，

$$P(\nu_\mu \to \nu_\tau) \simeq A_{\mu\tau} \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 t}{4E_\nu \hbar}\right) \tag{2}$$

と表され，その分生成したのと同じ種類の ν_μ として観測される確率は減り，

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) \simeq 1 - A_{\mu\tau} \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 t}{4E_\nu \hbar}\right) \tag{3}$$

と近似的に表すことができる．この確率は周期的に変化しニュートリノ振動と呼ばれる．ここで，Δm^2 は，ニュートリノの質量固有値の二乗の差（質量二乗差）で，これが 0 であると $P(\nu_\mu \to \nu_\tau) = 0$, $P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = 1$ となり，ニュートリノの種類は変化しない．逆に，ニュートリノ振動があれば $\Delta m^2 \neq 0$ であり，少なくとも 1 種類のニュートリノの質量は 0 ではないことが証明される．

ニュートリノ振動を観測するためには，その時間変化を観る必要があるが，ニュートリノはその軽さゆえに常にほぼ光速で運動し，1 カ所にとどまってはくれない．式 (2), (3) を，ν_μ の生成点からの距離 L [km] を用い，エネルギー，質量二乗差の単位をそれぞれ [GeV], [eV^2] にとると ν_μ の検出確率は，

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) \simeq 1 - A_{\mu\tau} \sin^2\left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E_\nu}\right) \tag{4}$$

となる．物質とほとんど反応しないニュートリノを検出するための装置は巨大であり*5)，測定器を動かして距離 L を変えながら測定するのは現実的でない．したがって実験的には，ニュートリノの種類の変化をニュートリノのエネルギーごとに測定し，振幅 $A_{\mu\tau}$ と，質量二乗差 Δm^2 を求める．

SK 実験による大気ニュートリノの観測結果は，測定された振幅 $A_{\mu\tau}$ がほぼ 1（とり得る最大値）であったことで非常に大きなインパクトがあった．

*5) 例えば SK 実験は 5 万トンの純水を用いている．

ニュートリノ振動に関しては，ν_e への変化などの別のモードの探索や，レプトンでの CP 対称性の破れの探索など重要なテーマがあり，加速器を用いて人工的に生成したニュートリノを用いた実験が日米欧で展開されている[9]．2013年には，現在日本で進行中のT2K実験によってニュートリノ振動によって ν_μ から変化した ν_e が初めて発見された[10]．

式 (4) によると，ニュートリノ振動が大きく現れる条件は，$1.27\Delta m^2 L/E_\nu = \pi/2$ である．さらに大気ニュートリノ観測での Δm^2 の測定値（約 2×10^{-3}[eV^2]）を代入すると $L/E_\nu \sim 500$ [km/GeV] となる．検出器で測定できる ν_μ のエネルギーの下限が約 0.2 [GeV] であることを考えると，$L > 100$ [km] でないとニュートリノ振動は観測できないことがわかる．ミクロな世界を記述する量子力学の効果であるニュートリノ振動が，100 [km] 以上という非常に長い距離をとらないと観測できないという，とても不思議なことが起きている．

T2K実験では，茨城県東海村にある大強度陽子加速器施設J-PARC[11]を用いて人工的にニュートリノビームを生成し，約 300 [km] 離れた岐阜県飛騨市にあるSK検出器で観測し，その間に起きるニュートリノ振動を精密に測定する．加速器ニュートリノ実験では，加速器からのニュートリノを，大気ニュートリノなど加速器以外に由来するニュートリノと区別する必要がある*6)．そのために "時間測定" が用いられている．

J-PARCでは約 5 [μs] の短パルスのニュートリノビームを約2秒おきに生成し，生成された時刻の情報をほぼリアルタイムでSK検出器に転送する．SK検出器は 300 [km] のニュートリノの伝搬に要する時間を考慮して，予想されるタイミングに観測されたニュートリノのみをJ-PARCからのニュートリノとして選別する．このため，J-PARCニュートリノビームラインとSK検出器の時計は，

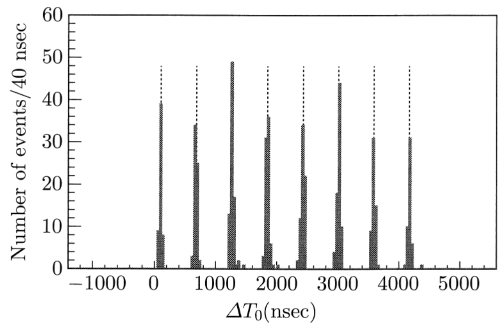


図3 T2K実験において，加速器でのニュートリノ生成のトリガーに同期してSKで検出されたニュートリノ反応の時間分布（提供：T2K collaboration）.

GPSを用いて ±200 [ns] 以内で合わせるように保たれている．図3は，実際にSK検出器で観測されたニュートリノ反応の時間分布である．ニュートリノ生成に用いたJ-PARC加速器の陽子ビームと同じ8バンチの微細構造が明確に見え，間違いなくJ-PARCで生成されたニュートリノであることが分かる．

ニュートリノ振動現象は，ニュートリノの質量の差は測定することはできるが，残念ながら質量の絶対値を決めることができない．では，加速器ニュートリノを用いて第3節で説明したTOF法による方法は使えるであろうか？ 式 (1) で，ニュートリノの質量を m_ν とし，質量がない場合との差，$\Delta T \sim L/c(m_\nu^2 c^4/2E_\nu^2)$ となる．例えば，T2K実験の条件（$L = 300$ [km], $\langle E_\nu \rangle \sim 0.6$ [GeV]）の場合，m_ν が現在の上限値の 2 [eV] を仮定しても，$\Delta T = 5 \times 10^{-21}$ [s] となり絶望的に小さい．

だからといって，「長基線ニュートリノ実験においてニュートリノのTOFを測定することには意味がない」ということでは全くない．もし仮に，光速との有為な差が実験的に発見された場合，確実に "未知の新しい物理による効果" が存在することの証明になる．

とはいえ，物理的に数百 [km] 離れた長基線ニュートリノ実験におけるTOFの測定は非常に難しい．通常の一つの実験サイト内にある2つの粒子検出器であれば，互いの時刻の校正は比較的容易であ

*6) 逆に，大気ニュートリノ観測や陽子崩壊探索などのデータに加速器由来のニュートリノが混入しないようにする必要もある．

る．両方の検出器をいったん隣接して置き，同時に通過した宇宙線の信号の時刻を比較する，などの方法がとれるからである．そのため，検出器の応答時間や，信号ケーブル・信号処理回路での信号の遅延時間の絶対値の測定は必ずしも必要としない．

ところが，物理的に離れた2つのサイトに置かれた検出器の時刻を合わせるには，たとえ両サイトの基準となる時計がGPSにより精度よく合わせられていたとしても難しい．時刻を記録すべき事象（加速器によるニュートリノ生成や，検出器内でのニュートリノ反応）が起きた時刻から，電気信号を通して基準の時計によるタイムスタンプをつけて記録されるまでの遅延時間の絶対値を，それぞれのサイトで測定しておく必要が出てくるためである．ニュートリノ検出器のような素粒子実験装置は大型で，信号数としては少なくとも数万チャンネルのオーダーになり，遅延時間を測定すべき項目としては膨大な数となる．

長基線ニュートリノ実験でのTOF測定としては，2007年に米国でのMINOS実験グループが発表し，光速からの有為な差は見られないという結果であった[12]．一方，欧州でのOPERA実験グループは，2011年秋に，「ニュートリノのTOFを測定した結果，光速での伝搬から予想される値よりも小さかった」と発表した[13]のち，2012年初夏に行なわれたニュートリノ国際会議ではそれを撤回し，光速からの有為な差はないと発表した[14,15]．2011年秋の誤報告の原因は，検出器のタイミング信号を送っている光ファイバーケーブルのコネクタが接続不良を起こしていたのが主因とされ，時間測定の結果は約70 [ns] 修正された．結果公表の経緯により混乱を招いたのは残念だったが，730 [km] 離れたサイト間のGPSによる時刻合わせの精度は高く，難しい測定に挑んだ点には敬服する．

5. 素粒子反応の時間発展に現れる粒子–反粒子の違い

1964年に中性K中間子で発見された粒子–反粒子の違い（CP **対称性の破れ**）のメカニズムとして「3世代6種類のクォークの存在」を予言した，小林誠氏・益川敏英氏の理論（2008年にノーベル物理学賞）は，日本のBelle実験や米国のBaBar実験による第3世代のボトムクォークを含む中性 B 中間子の CP 対称性の破れの徹底的な検証によってその正しさが確立された[16]．

中性 B 中間子には，反ボトムクォーク ($\bar{b}$) とダウンクォーク (d) で構成される B^0 中間子と，ボトムクォーク (b) と反ダウンクォーク ($\bar{d}$) で構成される $\overline{B}^0$ 中間子の2種類ある．$\overline{B}^0$ は B^0 の反粒子であり，逆に B^0 は $\overline{B}^0$ の反粒子という関係にある．実験的には，B^0 と $\overline{B}^0$ は崩壊によって生じる粒子の電荷により区別する．例えば，セミレプトニック崩壊で生じるレプトンの電荷の符号は，B^0 の崩壊では $+$，$\overline{B}^0$ の崩壊では $-$ となる．

これらの寿命はわずか $\tau_B = 1.5\,[\mathrm{ps}]$ であるが，そのごく短い生涯のうちにノントリビアルな時間発展を見せる．e^+e^- の対消滅で B^0 と $\overline{B}^0$ が1つずつ対生成された瞬間を時間の原点として考える．中性 B 中間子には，ニュートリノ振動とよく似た，B^0–$\overline{B}^0$ 混合という現象を起こし，時刻 $t=0$ に B^0 だった粒子が時間が経過して $t>0$ に $\overline{B}^0$ に変化したり，逆に $t=0$ に $\overline{B}^0$ だった粒子が時刻 $t>0$ に B^0 に変化したりする．

したがって，対生成された中性 B 中間子（おのおのを B_1, B_2 と名付ける）は，両方とも B^0（または $\overline{B}^0$）として崩壊する可能性と，一方は B^0 もう一方は $\overline{B}^0$ として崩壊する可能性の2つがある．それぞれの確率は2つの B 中間子が崩壊した時刻の差を Δt として，

$$P(B_1=B^0,\ B_2=B^0|B_1=\overline{B}^0,\ B_2=\overline{B}^0;\Delta t) \propto \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_B}\right)\cos^2\left(\frac{\Delta m}{2}\cdot\Delta t\right), \tag{5}$$

$$P(B_1=B^0,\ B_2=\overline{B}^0|B_1=\overline{B}^0,\ B_2=B^0;\Delta t) \propto \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_B}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta m}{2}\cdot\Delta t\right) \tag{6}$$

と書ける（$\Delta m/2$ は振動数に相当するパラメータ）．

Belle実験が本命として着目したのは，一方の B

中間子（仮に B_1）が J/Ψ と K_s^0 の2つの中性中間子に崩壊する現象である．この終状態には，B^0 からも $\overline{B}^0$ からも崩壊し得るので，崩壊した時点で B_1 が B^0 だったのか $\overline{B}^0$ だったのかは全く分からない．しかし，もう一方の B 中間子（B_2）が B^0（$\overline{B}^0$）として崩壊した場合，B_2 が崩壊した同時刻には B_1 は反対の $\overline{B}^0$（B^0）であったことが分かる．この崩壊の確率は，

$$P(B_1 \to J/\Psi + K_s^0, B2 = B^0, \Delta t)$$
$$\propto \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_B}\right)[1 + A_{CP}\sin(\Delta m \cdot \Delta t)], \quad (7)$$
$$P(B_1 \to J/\Psi + K_s^0, B2 = \overline{B}^0, \Delta t)$$
$$\propto \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_B}\right)[1 - A_{CP}\sin(\Delta m \cdot \Delta t)] \quad (8)$$

と B_2 の崩壊時の種類によって2通りの式で表される．これらの式は，もし振幅 A_{CP} が0でない場合，B_2 が崩壊した時点で B_1 が粒子（B^0）であったか反粒子（$\overline{B}^0$）であったかによってその後の時間発展に差があることを意味する．Belle 実験では実際に式 (5)〜(8) の確率の時間発展を測定した．

時間の測定の方法としては，ニュートリノ振動実験と同じように，B 中間子が崩壊するまでに飛行する距離として測定する．Belle 実験の場合，電子（8 [GeV]）と陽電子（3.5 [GeV]）を違うエネルギーで衝突させることにより，生成される B 中間子は測定器の中で崩壊するまでに平均 200 [μm] ほど飛行するようになっている．専用に開発された半導体飛跡検出器を用いて2つの B 中間子の崩壊点の間隔から崩壊時間差が求められ，実際に小林・益川理論の予想する形で CP 対称性が破れていることが実証された[17]．

6. まとめ

時間発展を追うことにより素粒子の性質に迫る実験を2例ほど紹介しましたが，どちらも粒子の飛行距離で"時間測定"を行ないます．飛行距離でいえば，一方はわずか 200 [μm]，もう一方は 300 [km] と9桁差がありますが，いずれも量子力学的な干渉を観ています．また，実験技術として"時間測定"が使われている例も2例紹介しましたが，これ以外にも最先端の素粒子実験では"時間測定"を利用したクレバーな装置がいろいろ開発され，"標準模型"を越える新しい物理へのチャレンジが続けられています．

参考文献

1) Particle Data Group Collaboration http://pdg.lbl.gov/
2) K.A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).
3) KEKB 加速器，http://www.kek.jp/ja/activity/accl/KEKB.html
4) Belle 実験，http://belle.kek.jp/welcome/
5) Takeo Higuchi, Doctor thesis, Univ. of Tokyo, Mar. 2002.
6) V.N. Aseev *et al.* [Troitsk Collaboration], *Phys. Rev. D* **84**, 112003 (2011) [arXiv:1108.5034 [hep-ex]].
7) スーパーカミオカンデ実験，http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/
8) Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998) [hep-ex/9807003].
9) K2K 実験，http://www.kek.jp/ja/activity/past/K2K.html；MINOS 実験，http://www-numi.fnal.gov/；OPERA 実験，http://operaweb.lngs.infn.it/?lang=en；ICARUS 実験，http://icarus.lngs.infn.it/；T2K 実験，http://t2k-experiment.org/ja/；NOνA 実験，http://www-nova.fnal.gov/
10) K. Abe *et al.* [T2K Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **112**, 061802 (2014).
11) J-PARC 加速器，http://j-parc.jp/Acc/ja/index.html
12) P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], *Phys. Rev. D* **76**, 072005 (2007).
13) T. Adam *et al.* [OPERA Collaboration], arXiv:1109.4897v2 [hep-ex].
14) M. Dracos [OPERA Collaboration], *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **235–236**, 283 (2013).
15) T. Adam *et al.* [OPERA Collaboration], *JHEP* **1210**, 093 (2012).
16) A.J. Bevan *et al.* [BaBar and Belle Collaborations], submitted to *EPJC*, SLAC-PUB-15968, KEK Preprint 2014-3 [arXiv:1406.6311 [hep-ex]].
17) K. Abe *et al.* [Belle Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091802 (2001).

（なかだいら・たけし，高エネルギー加速器研究機構）

秩序と無秩序を繋ぐ時間

生物の場合

伏見 譲

1. 生命の時間

17世紀にオランダのホイヘンスが発明した振り子時計は既に歴史的役目を終えたとはいえ，いまもなお時計一般のシンボルである．ホイヘンスは偉大な先達ガリレイが発見した振り子の等時性を利用したのである．ガリレイはその70年ほど前，ピサ大学の医学部学生だった頃，ピサ大聖堂のシャンデリアが揺れているのを見て，その周期を測定した．その測定法としては医学生らしく，自分の脈拍を用いたといわれている．脈拍は変動しやすいので計時などできないと思う人がいるかも知れないが，安静状態の脈拍はかなり安定しており再現性があり，振り子の等時性を確信する程度の精度があることをこの医学生は知っていたのであろう．この逸話が正しければ，心臓の搏動の周期が一定しているという信念が時計一般の出発点になったことになる．後でも述べるが生物の特性にこのような**ロバスト**（robust，頑強）**性**がある．極論すると，物理の基本中の基本：時間精密測定の出発点に生物学がある．

本川達雄氏の名著『ゾウの時間ネズミの時間』[1]にあるように，心臓の搏動周期は生体のサイズに依存する．呼吸の周期もこれと同種のものであろうが，我々の体の中にはこれ以外にも多様な「時を刻むもの」が存在する．外部環境の周期的変化に同期する体内時計もある．サーカディアンリズムと呼ばれる，日周運動に同期した蛋白質時計の分子生物学的研究が非常に発展している．

これらの生物時計は環境適応に成功し，生きのびてきた生物種が持っているものである．すなわち，生物進化の結果獲得されたものである．進化は環境依存であるので，直接的間接的に日光の影響を強く受ける生物の持つ時計の尺度は，地球自転を基本としていた物理時間の尺度と比例関係にある．しかし，一般には，生命の時間は物理時間に対して伸び縮みするのである．上述の脈拍時計は安静状態を基準とすれば，労働でも始めれば物理時間よりも縮むことになり，縮む割合も労働状況に応じて変動するだろう．しかしこの例はあまり良くないので，もう少し説得力のある定量的な例を次に挙げよう．

大腸菌の増殖は最小合成培地中37℃では倍加時間τ約50分で等大2分裂で進行する．すなわち，個体群密度$x(t)$は，$x(t) = x(0)2^{t/\tau} = x(0)\exp(t/\tau_g)$という指数関数的増殖を行う．ここで，$\tau_g = \tau/\ln 2$を**世代時間**という．我々は実験進化学の基本的装置として**タービドスタット**を作ったことがある[2]．この装置は流通式の連続攪拌培養槽で，槽内の大腸菌個体群密度$x(t)$を常に一定に保って長時間培養するものである．$x(t)$は培養液の濁度（turbidity）と単調な関係にあるので，濁度を測定してそれが一定になるように培地供給を兼ねた希釈流量$F(t)$を制御することをパソコンにさせる．槽の体積をVとすると，$D(t) = F(t)/V$を希釈率という．大腸菌の**比増殖速度**をk_g $(=1/\tau_g)$とすれば，槽内の大腸菌個体群の個体数が大きければ個体群動態は，次の微分方程式で記述できる．

$$\frac{dx}{dt} = k_g x - Dx. \tag{1}$$

タービドスタットの条件は$dx/dt = 0$なので，$D(t) = k_g$の関係が成り立つようにパソコンは$F(t)$を制御していることになる．増殖と希釈がバランスするということである．さて，環境温度Tを37℃から27℃の範囲で周期1時間の正弦関数で変化させる．大腸菌は我々と違って37℃のサーモスタットを体内に持っていないので，体内温度は環境温度にほとんど等しい．k_gは細胞内の生化学反応回路の速度論で決まるから，

温度の関数 $k_{\mathrm{g}}(T(t))$ である．制御用パソコンは $F(t)$ と $T(t)$ を知っているから，横軸 $1/T$，縦軸 $\ln k_{\mathrm{g}}$ のプロットが30分でできる．このプロットが直線でヒステリシスがないことがわかった．この温度範囲で，細胞内生化学反応の全体がこの速さの温度変化に速やかに追随し，$k_{\mathrm{g}} = A\exp(-E_{\mathrm{a}}/T)$ という見かけの活性化エネルギー E_{a} で表される通常の化学反応のアーレニウスの式に従うことを示した．合成最小培地中で37℃での倍加時間は50分だが，27℃での倍加時間は80分である．下の温度を25℃以下にすると，実験データはヒステリシスを示すようになる．大腸菌は中温用と低温用の生化学反応回路を異にし，それらを入れ替え組織化するのに時間がかかるのであろう．一方，最小合成培地ではなく，最も栄養豊富な培地で培養した（37℃）ときは倍加時間を20分まで短くできる．すなわち，物理的化学的環境（一般には，生物学的環境を含む生態学的環境）が変わると倍加時間，世代時間は非常に大きく変わるのである．よって，生命現象の時間変化を，物理時間を尺度として記述するか，世代数を尺度として記述するかで，様子ががらりと変わってくる．時間軸を世代数で目盛る場合は単純できれいな法則性が見られる場合，これを物理時間で目盛る場合は再現性のない複雑なデータとなる場合が多いことになる．世代数で時を刻む生命現象は，物理時間に対して大きく伸び縮みする生命の時間を使うからである．

ところで，タービドスタットの連続培養実験ではなく通常の回分培養実験では，個体数が非常に増えて食糧不足や環境汚染が進むと k_{g} はゼロ（世代時間は ∞）に近づいてゆく．この状態を静止期というが，体内の生化学反応回路はこの飢餓状態に対応（生理的適応）したものに大きく変化している．実際，培地のpHがアルカリ側に反転を始めるほどである．これに対しタービドスタットは対数期という最も「生きの良い」の生化学反応回路を観察対象にしていることになる．ケモスタットという簡易な長時間安定な連続培養法があるが，これは対数期と静止期の転移現象による内因性ネガティブフィードバックをうまく利用して安定性を得たものである．しかし，対数期と静止期という非常に異なる系の混合系を対象としているので，データが解釈不能に陥る場合も多い．同一のゲノム情報（遺伝子型）を持っていても，生理状態（表現型）が多数あるので，それを制御して研究しないと，生物は非常に複雑ですね，ということになる．

2. 適応設計された散逸構造

前節で述べた体内で時を刻むものの実体は，非平衡の生化学反応による時間構造である．ベルギーの物理化学者プリゴジンは非平衡熱力学を長年研究した結果，**散逸構造**（dissipative structure）の概念に到達した．物質やエネルギーの流れの中のような平衡から遠く離れた環境に自己触媒反応回路のような特殊な分子系が置かれれば，エネルギーの散逸を伴いながら（宇宙のエントロピーを増大させながら）系自体は秩序のある動的構造に自己組織化することがある．エントロピーの増大こそが散逸構造という秩序をもたらすという，平衡熱力学では考えられない革命的概念の発見である．散逸構造の例は，鳴門の渦潮，ロウソクの炎，ジャボチンスキー反応，生物個体，地球生態圏，….渦潮やロウソクの炎は存在するものというより，生成し続けるもの，というほうが的確であろう．生命が散逸構造であるという観点を，**生成論的生命観**と呼ぼう．

生物の重要な性質の一つに代謝があるが，代謝とは，体内に散逸構造形成に必須の物質とエネルギーの流れを自前で作り上げることである．生命の起源の初期の原始のスープが豊富にあった時代は代謝は必要でなかったかも知れない．いずれにせよ，現在の生物の持っている代謝経路を司る酵素蛋白質群はすべて，35億年の生物進化の産物である．それによってそれぞれの生態学的環境に遺伝的に適応することができた．

代謝が作り上げる物質とエネルギーの流れの中に，特殊なRNA＋蛋白質反応系があれば体内時計のような散逸構造が自己組織化してくることは可能であろう．これらのそれぞれ特殊なRNA＋蛋白質もまた環境適応の結果進化してきたものである．

一方，分子生物学のセントラルドグマは，DNA支配の**機械論的生命観**の基盤であり，生命を「秩序（DNA上の遺伝情報）から秩序（生体）」が生ずるものとして説明する．生体が物質とエネルギーの流れの中の非平衡状態にあるといっても，部分的局所的には平衡論が成り立つ場合も多く，実際，蛋白質の立体構造形成などは，平衡論の自由エネルギー原理に基づいて説明できる．

以上をまとめると，図1のような，物質と生命を繋ぐ2つの道を表す図が描ける．「私のDNA」から始まる右向きの矢印は，機械論的決定論的な遺伝情報の流れを示すが，でき上がった蛋白質は，周囲の物質を取り込んで，機械論的自由エネルギー原理による構造形成

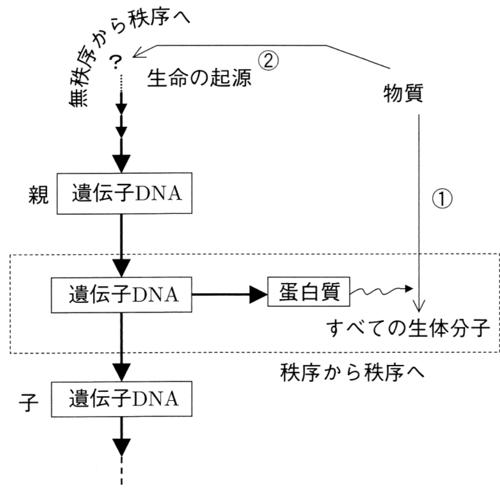


図１　物質から生命に至る２つの道．開いた矢印は化学反応を，黒三角矢印は情報の流れを，波矢印は触媒作用を表す．①の道は，秩序から秩序が生ずる過程に物質が利用される道である．分子生物学が明らかにしたDNA支配の機械論的生命観を表すが，散逸構造の形成という生成論的生命観も必要である．②の道は，特殊な物質・生体高分子が，無秩序から秩序を自己組織化してゆく過程である．機械論を基盤としつつも生成論が主役を演ずる．

と，生成論的な散逸構造形成との両方を含んで，ユークリッド空間中に「生体」を作り上げている．この散逸構造もDNA遺伝情報の支配下にある点が重要である．一方，「生命の起源」を通過する下向きの矢印は，「無秩序から秩序（DNA上の遺伝情報）」が生ずる過程を示している．この過程は，DNA複製という機械論的決定論的過程を基盤としながらも，ダーウィン進化機構による生成論的確率論的な情報の創出過程を表す．この過程は配列空間中に個体群地形としての生物種を作り上げてゆく．この無秩序と秩序とを繋ぐ時間について次節で論じよう．

3. 漸進的高速進化

ランダム突然変異と自然淘汰で生物進化を説明するダーウィン進化論には絶えず激しい批判者がいた（宗教的な反対が一番根強いが，ここでは問題にしない）．「自然淘汰で生き残ること，すなわち，最適者の生存とは，生存者を最適者とするのだから，同義語反復だ．」，「ランダム突然変異でヒトが進化してくるなんて，チンパンジーがタイプライターを叩いて，シェークスピアの文章が書けることを期待するようなものだ．」

進化学を観察科学から実験科学にすることによって，これらの批判に実験科学的に反論することができる．ガリレイに始まる近代実験科学は，自然のあるがままを観察するのではない．実験室の中に理想化され単純化された人工の自然を構築し，それを尋問するのである[3]．遺伝子工学をはじめとする分子生物学の実験技術の進歩により，実験室内にこの意味での人工の分子進化実験系を構築できるようになった[4]．我々はこの実験系の条件，すなわち，共重合高分子が自動的に高速に進化する実験系の十分条件を，**分子進化の構成的原理**として次のようにまとめた．(i) 非平衡開放系，(ii) 自己増殖系，(iii) 遺伝子型表現型対応付けのある系，(iv) 分子多様性作出系（広い意味の突然変異系），(v) 適応度地形が適切な系．

条件 (i), (ii), (iii) があると，その実験系では**ダーウィン淘汰**が実現する．さらに，条件 (iv), (v) が付け加わると，**ダーウィン進化**が実現する．実現することは，何種類もの進化リアクターが構築され，その中で実際に核酸やタンパク質やウイルスを高速に分子進化させることによって実証済みである．そのうちの一つで最初に作られたものに，上述のタービドスタットから供給される生きの良い大腸菌の流れの中で，それを食うウイルスを連続培養して，ウイルスの進化を測定するセルスタットと称する進化リアクターがある[5]．このウイルス培養槽の希釈率 D_c はウイルスの k_g に等しいが，$k_g^{(宿主大腸菌)} \ll k_g^{(ウイルス)}$ なので，$D_c \gg k_g^{(宿主大腸菌)}$ となり，この槽に流入してきた大腸菌は分裂する前に流れ去ることになる．すなわち，この槽中では大腸菌は進化し得ないから，ウイルスとの相互作用による大腸菌進化という背景雑音なしに，ウイルス（単純なものは，核酸とタンパク質とが結合した高分子集合体）の進化のみを測定できる．

もしも，進化リアクターの体積が十分大きく，また，進化の対象となる遺伝子核酸の塩基数 ν があまり大きくなければ 4^{ν} 種のすべての分子種を内蔵することができるので，条件 (i), (ii), (iii) のダーウィン淘汰だけで，最適者を決定論的に得ることができる．しかし例えば $\nu = 134$ 以上になると，$4^{134} = 10^{80}$ でこれは宇宙に存在する原子の総数に相当する数であるから，進化リアクター中にそのすべてを内蔵することは原理的に不可能であり，ダーウィン淘汰だけの決定論的プロセスでは最適者に到達し得ない．ランダム突然変異のような分子多様性作出法を導入して，絶えず未探査領

域の配列を新たに探査し続ける確率論的プロセスを行う必要がある（条件 (iv)）．現在の平均的蛋白質の遺伝子の長さは $\nu = 1000$ 塩基程度なので，このプロセスが生物進化で重要となる．

ここで，ダーウィンに対立するラマルク進化機構についてコメントしておこう．ラマルク進化機構では，ランダム突然変異ではなく，進化する方向に方向付けられた突然変異が起こると仮定する．方向付けられた突然変異が何であるかがわかるのなら，ラマルク進化機構は高速進化を説明できるが，それがわかるほどの知性を持ったモノが細胞内に存在しない限り（分子生物学の知見に拠れば，存在するとは考えられない），この進化機構は否定される．

条件 (v) に出てくる適応度とは，例えばタービドスタットの環境では k_{g} のことである．適応度は塩基配列（すなわち，遺伝情報）に依存するので，配列空間の各点に適応度の大きさをプロットしてみる．できあがった多次元曲面を**適応度地形** (fitness landscape) という．ダーウィン進化の過程は有限集団による適応度地形の確率論的山登りで表すことになる．麓（無秩序）から出発して頂上（秩序）に到達するのに要する時間（生命の時間．例えば，世代数に比例する試行回数）を評価してみよう．

適応度地形を描く**配列空間**の性質は，馴染み深いユークリッド空間と非常に異なるので，ユークリッド空間中の地形をイメージすると混乱する．まず両空間を比較してみよう (表 1)．配列空間は非常にコンパクトで，

表 1　配列空間をユークリッド空間と比較する．空間中の点の総数が同じになるように両者を調整し，最近接点間を飛び移って歩行することに関わる量を比較する．配列空間はきわめてコンパクトで出発点のすぐそばにゴールがある．しかし，迷いやすい．強力な羅針盤があれば，ランダム歩行ではなく適応歩行により，速やかにゴールに到達できるはずである．

	3 次元ユークリッド空間（地球を 1 m の立方格子で埋め尽くした格子点の集合）	2 値 70 次元配列空間（0 と 1 の 2 文字からなる長さ 70 の文字列の集合）
点の総数	10^{21}	10^{21}
一歩の単位	m	ハミング距離
2 点間最長歩数	10^7 歩	70 歩
最近接点の数	6	70

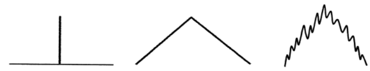


図 2　適応度地形の形状とダーウィン進化の可能性．縦軸：適応度，横軸：配列空間を模式的に表す．左：針型地形，中：富士山型地形（理想地形），右：ラフ富士山型（RMF）地形．適応歩行のための羅針盤の性能は適応度地形の形状に依存する．

出発点のすぐそばにゴールがある．しかし，一歩進んだ後，次の一歩を踏み出す方向の選択肢が非常に多いので，非常に迷いやすい．ところが，強力な羅針盤を持っていれば迷わないので，速やかにゴールに達することができるだろう．この羅針盤の役目を果たすのが，ダーウィンが発見した自然淘汰の原理である．ランダム突然変異で配列空間を移動する盲目の歩行者は，適応度地形の上を歩行することになるので，ランダム歩行をするのではなく，適応歩行をするのである．その羅針盤が強力かどうかは適応度地形の形状に拠る．

適応度地形の形状の対極的な例として，針型地形と富士山型地形を挙げよう（図 2 左，中）．天地を逆にすれば，それぞれ，ゴルフ場のグリーンの地形，漏斗型地形となる．適応度地形の先輩のエネルギー地形の理論ではこの天地が逆の場合を考察する．富士山型地形とは，点突然変異の適応度への効果に相加性があるということを意味する．従って，統計熱力学の理想気体になぞらえて理想地形と呼び得る．相加性があることを利用すれば，盲目の歩行者が麓から頂上に登坂するには，$\nu = 134$ の場合，わずか 134×3 回の試行錯誤を行えば十分である．次の例の 10^{80} 回と較べれば，いかに高速進化可能かがわかる．

一方，針型地形の場合，ピークの配列を確実に検出するには，配列空間の網羅的探査が必要である．ピーク周辺以外の平地では適応歩行ではなくランダム歩行しかできないからである．$\nu = 134$ の場合は，10^{80} 回もの試行が必要ということになる．すなわち，針型地形ではダーウィン進化機構で進化する可能性はほとんどゼロである．この節の冒頭で紹介した「チンパンジーがタイプライターを叩いてシェークスピアの文章が書けるか」という批判者は，暗黙のうちにこの地形を仮定していたという誤りに陥っていたのである．現実の生体高分子の実在地形がどうであるかは，実験で測定してみないとわからない．

具体的解析例を示そう (図 3)．各次元が (A, U, G, C) の 4 値からなる 3 次元配列空間は，コドンを点とする

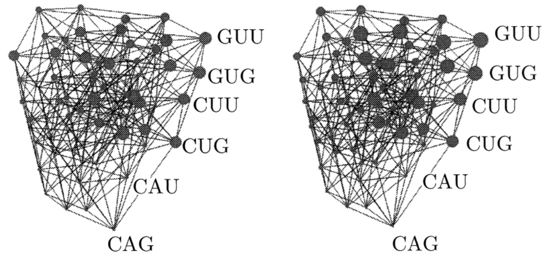


図 3　配列空間上の適応度地形の例．各次元が (A, U, G, C) の 4 値からなる 3 次元配列空間は，コドンを点とする空間でもあるが，ハミング距離 1 で結ばれる点を線分で結んで空間全体を示した．各コドンに付けられた円の半径は，対応するアミノ酸の疎水親水度（カイトによる）の値に比例させて描いた．例えば，CAG は親水性のグルタミン酸のコドンで，GUU は疎水性のバリンのコドンである．左図ではカイトが与えた値をそのままプロットし，右図では，それを富士山型地形に当てはめたものである．RMF モデルのパラメター θ(傾き/凹凸) $= 2.0$, Z-score $= 6.0$.

空間でもあるが，図 3 では，ハミング距離 1 で結ばれる点を線分で結んで空間全体を示した．各コドンに付けられた円の半径は，対応するアミノ酸の疎水親水度（カイト（J. Kyte）による）の値に比例させてある．例えば，CAG は親水性のグルタミン酸のコドンで，GUU は疎水性のバリンのコドンである．左図ではカイトが与えた値をそのままプロットし，右図は，それを富士山型地形に当てはめたものである．左の地形は非常に富士山型に近い，図 2 右のような**ラフ富士山型（RMF）地形**である．疎水親水度以外の様々なアミノ酸の物性に対しても同様の解析をすると，疎水親水度ほどではないが，やはり RMF 地形をしていると結論できた[6]．従って，現在の地球生物が用いている遺伝コード表は，点突然変異しても蛋白質の物性はあまり変化しない，つまり，コピーミスをしても大事件にならないような仕組みになっている，すなわち，ミスに対してロバストであるような仕組みになっている．しかし同時に，そのわずかな変化を積み重ねて速やかに親水性から疎水性に進化する能力も持つ．我々の遺伝コード表は**ロバスト性**と着実な**進化可能性**を合わせ持つように最適化されているのだ[6]．

また，天然の蛋白質の遺伝子を実験室に持ち込んで，進化分子工学でさらに進化させてみると，その周囲の適応度地形は RMF 地形であることが多い[7,8]．この場合の適応度とは，比増殖速度ではなく，その蛋白質の注目する機能に関わる自由エネルギーとする．例えばリガンド結合の ΔG である．進化してきた実績のある蛋白質の周囲の地形が理想地形に近いというのはつじつまの合った話と言えよう．

無秩序から秩序を生み出すダーウィン進化機構は，理想地形でその最大の力を発揮するが，その過程は「**漸進的高速進化**」と表現できる．盲目の歩行者の場合，多段階で時間をかけて進化するほうが一気進化を狙うよりはるかに高速進化するのだ．無秩序と秩序を繋ぐ時間（「生命の時間」である）をうまく利用して創出してきたのが生物である．

4. 非最適者の生存と一歩後退二歩前進

前節の条件 (i), (ii), (iv) を数式で表したのが，アイゲン（M. Eigen）の RNA 分子進化方程式である[9]．

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{4^\nu} W_{ij} x_j - D(t) x_i, \tag{2}$$

$$W_{ii} = k_{\mathrm{a}i}(1-\mu)^\nu - k_{\mathrm{d}i},$$

$$W_{ij} = k_{\mathrm{a}j}(1-\mu)^{\nu - d_{ij}} \mu^{d_{ij}}.$$

ここで，希釈率 $D(t)$ の進化リアクターの中で，長さ ν 塩基の RNA 分子種 X_i $(i = 1, 2, \cdots, 4^\nu)$ が増殖しているとする．X_i の濃度を $x_i(t)$ とする．$k_{\mathrm{a}i}, k_{\mathrm{d}i}$ はそれぞれ X_i の複製反応速度定数，分解反応速度定数である．μ は 1 文字コピーするときのミスコピー率（すなわち，突然変異率）である．W_{ii} は親の X_i が正しく子の X_i を生み出す速度定数（すなわち，比増殖速度）を表すから，タービドスタットモード（$\sum_{i=1}^{4^\nu} x_i =$ 一定）で進化リアクターを運転するときは，X_i の適応度である．W_{ij} は X_j が突然変異を起こして X_i が生ずる速度定数で，d_{ij} は X_i と X_j の間のハミング距離である．すなわち，d_{ij} 個の点突然変異が同時に起こることが X_j が X_i となる条件となる．$\mu \ll 1$ なので，分子種間のハミング距離が遠いと，この遷移は極めて起こりにくくなる．最近接相互作用があるといってもよい．実際，アイゲンモデルは，2 次元イジングモデルと数学的に等価であることが証明されている．強磁性・常磁性転移に相当するものは，配列空間中の**局在・非局在転移**である．キュリー温度 T_{c} に相当するものは，臨界突然変異率 μ_{c} であるが，かなりの場合 $\mu_{\mathrm{c}} \propto 1/\nu$ という納得できる関係が得られる．$\mu > \mu_{\mathrm{c}}$ となるほどミスコピーが頻発すれば，自然淘汰による配列の収束が間に合わなくなり，遺伝子塩基配列が配

列空間全体に拡がってしまい，種として同定できなくなる．この現象はエラーカタストロフィーと呼ぶにふさわしい．

アイゲンモデルの最も重要な性質に擬種の概念がある．タービドスタットモードでは，$D(t)$ は $\{x_i\}$ の関数であるので，式 (2) は非線形である．しかし，ある特殊な変換を行うと線形化できる．得られた線形連立微分方程式を常法に従って対角化すれば，

$$\frac{dy_q}{dt} = \lambda_q y_q - D(t)y_q, \quad q = 1, 2, \cdots, 4^{\nu} \quad (3)$$

が得られる．λ_q は行列 (W_{ij}) の固有値である．y_q は x_i の線形結合である．y_q に対してもタービドスタット条件が成り立つので，この連立微分方程式は，$t \to \infty$ のとき，$D(t) \to \lambda_{\max}$（最大固有値）となることを意味する．すなわちタービドスタット中には $y_{\max}$ のみが存在する．自然淘汰の結果，$y_{\max}$ が生き残ったのである．元の RNA 分子種集団から見ると，自然淘汰の結果，X_i のある分子種分布が生き残ることになる．この分子種分布をアイゲンは**擬種**（quasi-species）と名付けた．

ダーウィンの自然淘汰で最適者 $X_{\max}$（最大の適応度 W_{ii} を持つ X_i）のみが生き残るのは，突然変異率 $\mu = 0$ という理想条件下でしかない．有限の μ のときは，突然変異で結ばれる最近接分子種との相互作用の結果，協同現象が起こるのである．周囲にダメなものばかりがいる孤立した最適者は，周囲にそこそこのものが多くいる 2 番手に負けるのである．μ が大きくなれば「最適者の絶滅」すら起こり得る．これは熱力学のエネルギーと自由エネルギーの関係に似ているので，「自由適応度」λ 最大のものが生き残ると言い換えてもよい．

突然変異で非最適者が生まれてくる機構が存在する限り，いかに自然淘汰が厳しくても集団中に**非最適者は常に共存**する．この事実の意義が，生物個体群の遺伝的多様性が，予測できない環境変動に遺伝的に速やかに適応するために必要であると，守りの姿勢で説明されることが多い．しかし，同じ事実が生命体の質的進化という攻めの姿勢にとっても重要であったと思われる．我々は，生命の起源に想定される RNA 分子だけからなる生命世界「RNA ワールド」に蛋白質が参入してくるメカニズムのモデルを作ったことがある[10]．RNA ワールドはヌクレオチドどうしを結合しているホスホジエステル結合の生化学を進化させるはずだが，ペプチド結合はエステル結合に似ているので，RNA ワールドでは副産物としてペプチド結合の生化学が進化してくるはずだ．実際，これは進化分子工学実験で実証されている．RNA ワールドに RNA とアミノ酸やペプチドが結合したものを作成する機構が出現した．そのような結合体は，最初は RNA 複製の阻害物質として邪魔者だろうが，作出機構が存在する以上，排除し尽すことはできない．すると，この阻害物質を無害化するような RNA のほうが環境適応できたことになる．次の段階では，無害化よりも活性化剤にするようになった RNA のほうが環境適応できたことになる．こうしてペプチドを補因子として活用する時代が到来する．最初は毒や病原体であったものが，ダーウィン進化した結果，同じものが資源や共生体になったと考えられる例は他にもたくさんある．酸素やミトコンドリアが代表例である．生命の時間で言えば，いったん遅くなることで，次の時代の飛躍的速さと秩序の飛躍的増大（質的進化）を準備することがある．

参考文献

1) 本川達雄,『ゾウの時間ネズミの時間』(中公新書, 1992).
2) 伏見譲，田中豊助，西垣功一，木下保則，生物物理 **20**:6, 379–384 (1980).
3) A. コイレ，『ガリレオ研究』（菅谷暁訳，法政大学出版局，1988）.
4) 伏見譲監修，『進化分子工学』（NTS, 2013）.
5) 伏見譲，西垣功一，木下保則，田中豊助，遺伝 **35**:1, 41–48 (1981).
6) 伏見譲，相田拓洋，数理科学 **38**:3, 37–43 (2000).
7) T. Aita *et al.*, *Biopolymers* **54**, 64–79 (2000); ibid., **64**, 95–105 (2002).
8) I.G. Szendro *et al.*, *J. Stat. Mech.*, P01005 (2013).
9) M. Eigen, *Naturwiss.* **58**, 465–523 (1971).
10) N. Nemoto, Y. Husimi, *J. Theor. Biol.* **176**, 67–77 (1995).

（ふしみ・ゆずる，総合研究大学院大学，埼玉大学名誉教授）

暗号における時間の有限性・非可逆性

現代暗号から量子暗号へ

林　正人

1. はじめに

我々が日常的に行う行為は，すべて時間の制約を受ける．いわば常に「時間との闘い」の中に我々の生活が存在している．例えば，この本稿にも締切りがあり，締切りまでに原稿を仕上げないととんでもないことになるという意味で，本稿の執筆もある意味で時間との闘いである．それでは，なぜ，我々は時間と戦わざるを得なくなるのであろうか？ それは，時間には有限性と非可逆性という不可避的な性質があるからである．先に述べた本稿における締切りの存在は，時間の有限性に起因するものである．一方，本稿が出版され一旦世に出ると，それを撤回することは不可能である．みっともない誤りがあるととんでもないことになる．そのため，原稿の執筆には常に細心の注意が必要となる．こちらは，時間の非可逆性によるものである．本稿では，暗号の視点から時間の有限性・非可逆性について考えてみることにする．

そもそも暗号は時間との闘いと言っても過言ではない．むしろほとんどの暗号は時間の有限性もしくは非可逆性を巧妙に利用することによって成り立っている．現在，良く使われている多くの暗号の安全性はある関数の**計算困難性**を根拠にしている．計算困難性とはその関数の計算に極めて長い時間を要することを意味している．このような暗号は現代技術として使われていることから**現代暗号**と呼ばれ，無限に解読のために時間をかけることが許されているのであれば解読可能であるが，現実的な有限時間でその解読を行うことがほぼ不可能であるため安全であると考えることができる．すなわち，現代暗号は時間の有限性を逆手に取ることで，安全性を実現した暗号であるとみなせる．以下では，時間の有限性・非可逆性による効果を考えながら，現代暗号から次世代の新技術である**量子暗号**に至る流れを見ていくことにする．

2. 秘密鍵暗号

はじめに，暗号の中で最も基本的な**秘密鍵暗号**について述べよう．残念ながら秘密鍵暗号ではあまり時間の有限性・非可逆性は問題にならない．一般には暗号では，伝送したいメッセージ（**平文**）M を**暗号文** C に変換し（**暗号化**），平文 M の代わりに暗号文 C を伝送することで，平文 M の秘匿性を確保する．そして，受信者は，暗号文 C に適切な変換（**復号**）を施すことで平文 M を得る．

一般に，秘密のビット列 X を送信者と受信者の間で共有していれば，上記の暗号化・復号は可能である．例えば，平文があらかじめビット列 M に変換されていたとすると，秘密のビット列 X と M の排他的論理和をとって得られるビット列 C を暗号文とすることで，暗号化が可能である．このとき，復号は暗号文 C と秘密のビット列 X の排他的論理和をとることで得られる[1)]．この方法では，秘密のビット列 X は**秘密鍵**と呼ばれ，こ

れを送信者と受信者の双方でのみ共有する必要があるため，この方法は秘密鍵暗号と呼ばれる．秘密鍵暗号では鍵の配送が問題となる．

3. 現代暗号

上記の鍵の配送の問題を解決する一つの方法が現代暗号の代表例である**公開鍵暗号**である[2)]．公開鍵暗号では，暗号化の際の鍵と，復号の際の鍵を分けることでこの問題を解決する．ある人が自分の秘密の情報を送ってもらいたいとしよう．そのために，暗号化に用いる鍵（**公開鍵**）は完全に公開し，復号に用いる鍵（**秘密鍵**）のみ秘密にする．具体的には，平文 M を暗号文 C に変換する際には，公開鍵を用い，暗号文 C から平文 M を復元する際には，秘密鍵を用いる．ここで，平文 M から暗号文 C への変換方法が与えられれば，平文 M と暗号文 C の対応関係が決まることになるので，平文 M から暗号文 C への変換（暗号化）に用いる公開鍵だけの情報だけで暗号文 C から平文 M への変換もできるはずである．しかし，それを妨げるのが時間の有限性である．

公開鍵暗号方式の中で最も有名なものが，ロナルド・リベスト，アディ・シャミア，レオナルド・エーデルマンの3名によって考案された現代暗号の一つである **RSA 暗号**である[3)]．RSA 暗号は素因数分解の困難さを上手く利用してその安全性を実現している．時間の有限性の効果について詳しく調べるために，RSA 暗号の具体的な構成について説明しよう．はじめに，秘密鍵と公開鍵を以下の手順で作成する．2つの巨大な素数 p, q を選択する．そして，$n := pq$ と $\phi(n) := (p-1)(q-1)$ を求める．この n を係数と呼ぶ．そして，$\phi(n)$ と互いに素になる自然数 e を選ぶ（この数を**公開指数**と呼ぶ）．そして，$1 = de \bmod \phi(n)$ を満たす自然数 d（**秘密指数**と呼ぶ）を選ぶ．RSA 暗号では公開指数 e と係数 n の対 (e, n) が公開鍵となり，秘密指数 d が秘密鍵となる．そのため，受信者は公開鍵 (e, n) のみ公開し，p, q, d が誰にも知られないようにしておく．

そして，暗号化を

$$C := M^e \bmod n \tag{1}$$

で与える．すると，

$$M = C^d \bmod n \tag{2}$$

が成り立つため，復号は上の式の右辺で与えることができる．

ここで，d を知っていれば，(2) の右辺により，容易に M を求めることができるが，p, q, d を知らずに C と e, n だけの情報から M を効果的に計算する方法が存在しない．少なくとも現在知られているどのアルゴリズムを用いても，C と e, n だけから M を計算するには，自然数 n の大きさや，暗号化に要する時間に比べて，途方もない計算時間が必要である．そのため，RSA 暗号は安全であると考えられている．しかし，計算にいくらでも時間をかけても良いということになると，C と e, n だけから M を求めることができ，解読が可能となる．具体的には，M を 1 から始めて n までのすべての整数について関係式 (1) が成り立つか否か一つずつ確認すれば可能である．もちろん，n が大きい場合，このような方法は途方もない時間を要し，年単位でも不可能であるので，時間の制約から現実には実行可能ではない．ほかに，n を素因数分解することで p, q を求め，p, q から d を求めて解読する方法がある．この方法でも，n の素因数分解に莫大な計算時間が必要となり，時間の制約から実行不可能となる．このように RSA 暗号は時間の有限性を巧妙に使った暗号方式であることが分かる．

4. 現代暗号の問題点

次に，RSA 暗号を例にとって，現代暗号の安全性に本当に問題がないか考えよう．しばしば，RSA 暗号の紹介の所で，「n がある値の場合，現在のコンピュータで，現在知られているアルゴリズムを用いた場合，その解読には何万年はかかる」という表現がなされる場合がある．しかし，技術論的な立場から考えると，「何万年」というオーダーの

時間は現実的にはほとんど意味がない．なぜなら，何万年後にも人類が存在するとは限らないし，たとえ存在していても，彼らが現在の我々と同レベルのコンピュータやアルゴリズムを用いているとは限らない．そもそも，20年ほど前に困難であった数の素因数分解が現在のコンピュータと最新のアルゴリズムで可能となる例もある．

RSA暗号のポイントは，同レベルの技術を用いた場合，特定の n, d, e について，暗号化と秘密鍵を用いた復号は容易にできるが，C と e, n だけから M を求める解読は極めて困難である点にある．そのため，時代が変わり使えるコンピュータなどの性能が大幅に向上してしまうと，解読が可能となってしまう．事実，1977年に提案されたある公開鍵 (e, n) に基づくRSA-129は，当初その解読に2万年は要すると考えられていたが，17年後に解読されている[9)]．これは計算時間による安全性の根拠が技術の発展という異なる時間経過の要因により破られることを意味している．すなわち，時間に関しては，短期的には計算時間の問題によりRSA暗号の安全性が確保され，長期的には技術の発展によりその安全性が脅かされる，とまとめることができる．現代暗号の安全性が技術レベルに依存してしまう原因は，物理法則に基づく計算時間の限界ではなく，技術レベルに依存した計算時間を安全性の根拠にしていたからである．この問題を根本的に解決するには，物理法則に基づく安全性を根拠とする暗号が必要となる．

例えば試験問題のような機密は試験日までの秘密が保持されれば十分であるので，長期間の秘密の保持は必要ない．一方，外交文書などのように長期間にわたり秘密にしたい場合には，RSA暗号などの計算量に基づく暗号は適切とは言えない．卑近な例では，若いころの浮気を一生秘密にしたい人にとっては，20年程度の秘密では十分ではないであろう．

そのほか，新技術として量子計算機と呼ばれる計算機もすでに提案されており，この計算機に特化したアルゴリズムであるShorのアルゴリズムを用いると，素因数分解が効果的に行えることが知られている[8)]．このような計算機が実現してしまえば，RSA暗号は重大な脅威にさらされることになる．量子計算機を実現するには，量子力学系を極めて高度に洗練された形で操作する必要があり様々な困難があるものの，長期的な視点では実現しない保証はないため，RSA暗号の長期的な安全性については不安が残る．

そもそも，計算量に基づく暗号に上述のような問題があるのは，平文と暗号文との対応関係が公開鍵から決まってしまうからである．平文と暗号文との対応関係を決めるために必要な情報が全く第3者に伝わっていなければ，何万年経とうと，全く第3者に漏れる心配はない．そのためには，先の秘密鍵暗号を用いれば問題ないのであるが，この方法の場合，秘密鍵の配送が問題となる．秘密鍵を配送する一つの方法は，DVDなどに秘密のビット列を保存して，それを第3者に渡されないようにして配送する方法がある．しかし，この方法では人件費が嵩むので，適用できる範囲に限界がある．また，鍵を配送する人が途中で襲われたり，ハニートラップにはめられたりする危険も無視できず，いろいろと問題がある．

5. 量子暗号

上述の秘密鍵の配送問題を物理法則に基づいて解決する方法が，1984年にチャールズ・ベネットとジレス・ブラッサードによって提案された**量子暗号**である[4)]．その後，様々なタイプの量子暗号が提案され改良されているため，ベネットとブラッサードのオリジナルのプロトコルは**BB84プロトコル**と呼ばれる．量子暗号は，盗聴者に漏えいされることなく，遠隔の2者の間に秘密の乱数列である秘密鍵を配送する方法である．この暗号でも実は時間が鍵となる．時間の有限性よりも時間の非可逆性が主な要因となる．量子暗号の特徴は，量子力学に従うミクロな粒子を用いて情報の伝送を行う点にある．例えば，光もその出力を極限まで小さくすると，光の粒子である光子として振る舞うので，これを量子暗号に使うことも可能であ

る．この場合，通常の光通信と比べて極端に弱い光を用いる．

5.1 偏光による量子系

光子には光の波の振動の方向に対応する自由度として，**偏光**と呼ばれるものがある．本稿では，光の偏光を用いてBB84プロトコルの説明を行うが，その準備として，偏光による量子系について説明する．偏光には垂直方向の偏光と水平方向の偏光の2つの自由度があるが，それに加え垂直方向の偏光と水平方向の偏光を混ぜた斜め45度方向の偏光と135度方向の偏光がある．そして，互いに直交する方向の偏光の組を**基底**と呼ぶことにする．例えば，垂直方向と水平方向の偏光の組は **+ 基底**と呼び，斜め45度方向と135度方向の偏光の組は **× 基底**と呼ぶ．実は量子力学では，測定に強い制約があり，これがミクロな系の大きな特徴となっている．光子の偏光の場合，一つの基底を形成する互いに直交する方向の偏光の組のみ測定により100%の確率で識別できる．したがって，斜め45度方向と垂直方向の偏光を100%の確率で識別することは不可能である．さらに，1回の測定では特定の基底の偏光だけを識別することのみが可能である．したがって，+ 基底に対応する測定を選んでしまうと，垂直方向と水平方向の偏光を100%の確率で識別することはできるが，斜め45度方向と135度方向の偏光については全く識別できない．この場合，測定値として得られる情報は垂直方向もしくは水平方向のどちらかであり，斜め45度方向もしくは135度方向の偏光が入力光子の偏光である場合，それぞれの測定値が得られる確率は50%である．+ 基底の偏光に対して，× 基底に関する測定を行った場合も同様に，それぞれの測定値が得られる確率は50%である．このように，光の偏光については，特定の基底に対応した測定しかできず，どのような測定を行うか決めるために，事前に基底を定めないといけない．また，測定を行ってしまった場合，測定後の偏光は，得られた測定値の偏光に変化してしまう*1)．

5.2 偏光によるBB84プロトコル

以下，これらの偏光を用いた場合のBB84プロトコルについて説明しよう．そのために，あらかじめ各基底の偏光にビット値を割り振っておく．例えば，+ 基底の場合，0には垂直方向の偏光が対応し，1には水平方向の偏光が対応するとする．同様に，× 基底の場合，0には45度の偏光が対応し，1には135度方向の偏光が対応するとする．

(1) 送信　送信者は確率50%でランダムに + 基底か × 基底のどちらかを選ぶ．そして，等確率で0または1のビットを生成し，選んだ基底でのビット値に対応する偏光状態を伝送する．

(2) 受信　受信者は確率50%でランダムに + 基底か × 基底のどちらかを選び，その基底に関する測定を行う．そして，得られた測定値に対応するビット値を記録する．

上記のプロセスは**量子通信**と呼ばれ，たくさんのビット値がたまるまで続けるとする．

(3) 基底照合　送信者と受信者は互いが選んだ基底についての情報を公開通信路上で交換し，基底が一致した部分に対応するビット値のみ残し，基底が一致しなかった部分に対応するビット値を捨てる．

(4) ビット値照合　送信者は基底が一致したビット値のうちのそれぞれの基底の乱数について，一定の割合のビット値を，ランダムに指定する．送信者と受信者はそのビット値を公開通信路上で交換することで，ビット値の不一致がないか確認する．ビット値の不一致があった場合，盗聴があったと判断して残りのビット値を捨てる．一方，ビット値の不一致がない場合，盗聴がなかったと判断し，残りの公開しなかったビット値を秘密鍵として用いることにする．

このプロトコルで行っていることはあくまでも

*1) より一般には，必ずしも一つの基底に対応しない測定も存在する．測定後の状態は必ずしも，測定値として得られた方向の偏光とは限らない．そのような一般の場合ではその議論が複雑になるが，結論は本稿で得られるものと同じであるので，ここではこのような仮定を置いて議論を進めることにする．

秘密鍵の配送であり，秘密情報の伝送ではないことに注意されたい．量子通信の秘匿性は事前には必ずしも保証されていないので，秘密情報の伝送を量子通信で行えば，量子通信への盗聴が起きた時点で秘密の情報は漏えいしてしまう．

5.3 BB84 プロトコルの安全性

この方法で安全な秘密鍵の配送が可能となる理由を説明しよう．ビット値照合を行っているので，送信者と受信者の残りのビットの間には誤りがないと考えられるので，問題になるのは，その情報に関する漏えいの有無である．送信者の用いた基底に関する情報が，量子通信が終了するまで，全く公開されていない点に注意してもらいたい．そのため，盗聴者のみならず，受信者までもが誤った基底で測定してしまい正しい情報が得られない．もちろん，ここで送っているものが秘密に伝送したい情報であれば，この方法では上手く情報伝送が行われない．しかし，目的はあくまでも鍵の配送であるので，半分がダメになっても，残りの半分で秘密鍵が生成できれば十分である．この点が，量子暗号のポイントである．

さて，ここで盗聴者は送信者の用いる基底も受信者が用いる基底も事前に知ることができない事実に注目しよう．以下，盗聴が行われたとして，何が起きるか考えてみよう．基底照合の後のビット値照合では，送信者と受信者の基底が一致しているビット値にのみ注目するので，その中で，盗聴者が正しい基底を選んで測定する確率は50%である．そして，盗聴者が誤った基底を選んでしまった場合，最初に述べたように，異なる基底の偏光に変わるため，確率 50%で受信者は送信者が送ったビット値と異なるビット値を得る．すなわち，ビット値照合するビットの中では，25%の割合でビットの反転が起きる．したがって，ビット値照合に用いるビット値の数が十分大きければ，確実にビット値照合の際に不一致が生じ盗聴が検出できる．ここで，ビット値照合に用いるビット値は，量子通信終了後にランダムに選んでいる点に注意してもらいたい．そのため，盗聴者は，事前にどの量子通信がビット値照合に用いられるか分からないことも重要なポイントである．

上記の盗聴の検出では，偏光の測定における時間の非可逆性が重要な役割を果たしている．重要なことは (3) 基底照合が (1) 送信 (2) 受信の後に行われている点である．そのため盗聴者が仮に (3) 基底照合で送信者が用いた基底情報を手に入れたとしても後の祭りとなり，もやは正しい情報を取り出すことができない．このように，量子暗号では，偏光の測定（より一般には量子論）という物理法則を基礎にして，時間順序を適切に使うことで，盗聴者が秘密裏に盗聴することを防いでいる．

6. 秘匿性増強

量子暗号の安全性を考えるには，ここで述べた盗聴方法以外の盗聴方法も検討した上で，異なる議論を経て安全性を証明する必要がある．それらを考慮しても安全性が示せることが知られている．例えば，極端に弱い光を用いて通信した場合，どうしても一定レベルのノイズは不可避である．そのため，ノイズによるビット誤りを除去する技術として，通常の情報通信と同様にして誤り訂正が必要となる．さらに，(4) ビット値照合において一定の誤り率を許した場合，ノイズに紛れた部分的な盗聴の可能性を加味する必要がある．この場合，部分的に漏えいした情報を無効にする処置が必要である．このために用いられる技術が**秘匿性増強**である．秘匿性増強は乱数の生成にも用いられ，近年盛んに研究されつつある．

秘匿性増強では，部分的な情報漏えいがあるビット列から，その長さを短くすることで，情報漏えいがほとんどないビット列を生成する．そのような変換を与える関数は**ハッシュ関数**と呼ばれる．そして，ビット長の減少分は犠牲ビット数と呼ばれる．一般に，犠牲ビット数の割合を大きくすれば最終的なビット列（最終鍵）の情報漏えいは小さくできる．しかし，最終鍵の情報漏えいの量は単純にハッシュ関数の犠牲ビット数の割合だけでは決まらない．一般にハッシュ関数では，多くのビットを一つのブロックとして捉え，一つのブロック

に対して演算を行う．1ブロックの長さ（**ブロック長**）を長くすればするほど，同程度の最終鍵の情報漏えいの量を実現するために必要な犠牲ビット数の割合を小さくすることができる．すなわち，犠牲ビット数の割合とブロック長とはトレードオフの関係にある．このハッシュ関数のブロック長は計算時間と大きな関係にある．このハッシュ関数の計算時間はブロック長が増加すると増えてしまう．そのため，増加分を最小限に留めるハッシュ関数が望まれる．そのほか，ハッシュ関数はランダムに選ぶ方式で構成されるため，ハッシュ関数の選択のための別の（秘密である必要はない）乱数（**種乱数**）を消費する．種乱数の数が多くなってしまうと，プロトコルの実現コストが増えてしまうので，種乱数が少ないハッシュ関数も望まれる．近年，筆者らは，有限体上の議論を用いることで，種乱数が少なくブロック長が増えてもあまり計算量が増えないハッシュ関数を提案した[5]．このように秘匿性増強においても時間は重要な役割を果たす．

7. 量子暗号の実現に向けて

さて，量子暗号の現状であるが，RSA 暗号のように，情報の伝送にインターネット回線を使うわけにいかないので，その実現には特有の実験技術が必要となる．そのためには，単一光子もしくはそれに匹敵する弱い光を遠隔地に飛ばす技術が必要である．この技術はある意味で従来の光通信技術の延長として捉えることができる．もともと光通信では，光をより遠くまで効果的に伝送する技術が研究されてきた．その結果，ファイバーを用いた場合に最も効率的に遠隔地まで飛ばすことのできる波長帯が明らかになり，その波長帯は通信波長帯と呼ばれている．現在，量子暗号の実用化のために，通信波長帯に重点をおいて，弱い光を生成し，高い効率で受信する技術の研究が行われている．同時に，そのような状況では，実現される量子通信は理想的な量子通信とはやや異なるため，それに伴う不完全性を考慮した，量子暗号理論の構築も進められている[7]．そのような不完全性を考慮し，様々な点での効率を向上させる研究が理論・実験双方の側面から行われている．なお量子暗号は従来技術と比較すると高度な技術が要求されるものの，量子計算機に代表される量子情報技術[6]の中では要求される技術レベルは相対的に低いため，比較的実現が容易な技術であると考えられている．そして，東京ネットワークに代表される量子暗号ネットワークの接続実証実験もすでに行われており，量子暗号の実用化に向けた研究・開発は，情報通信研究機構（NICT）を中心としたプロジェクトの下で，NTT や NEC，三菱電機，東芝などの国内の電機メーカーの努力により着々と進んでいる．

参考文献

1) C. Shannon, "Communication Theory of Secrecy Systems," *Bell System Technical Journal*, vol.**28**, 656–715, 1949.
2) W. Diffie and M. Hellman, "Multiuser Cryptographic Techniques," *Proceeding AFIPS '76 Proceedings of the June 7–10, 1976, national computer conference and exposition*, 109–112 (1976).
3) R.L. Rivest, A. Shamir, and L. Adelman, "A Method for Obtaining Digital Signature and Public-key Cryptsystems," MIT Laboratory for Computer Science; Thechnical Memo LCS/TM82; (1977).
4) C.H. Bennett and G. Brassard, *Proc. of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, 175–179 (1984).
5) M. Hayashi and T. Tsurumaru, "More Efficient Privacy Amplification with Non-Uniform Random Seeds via Dual Universal," arXiv:1311.5322 (2013)
6) 石坂 智，小川 朋宏，河内 亮周，木村 元，林 正人，『量子情報科学入門』共立出版 (2012).
7) M. Hayashi, and R. Nakayama, "Security analysis of the decoy method with the Bennett-Brassard 1984 protocol for finite key lengths," *New J. Phys.*, **16** 063009 (2014).
8) P.W. Shor, "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer," *SIAM Journal on Computing*, **26**, 1484–1509 (1997).
9) D. Atkins, M. Graff, A.K. Lenstra, P.C. Leyland, "The magic words are squeamish ossifrage," *Advances in Cryptology – ASIACRYPT'94 Lecture Notes in Computer Science*, Volume **917**, 261–277, (1995).

（はやし・まさひと，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

時空特異点とトポロジー

宇宙の因果

原田　知広・椎野　克

1. はじめに

相対論に興味を持ち始めた学生の最も好む質問といえば時間旅行についてのものである．次いで多いのが宇宙の始まりや終わりについてなどであるが，要は我々の宇宙を突き通す一貫とした時間軸の存在についての問い掛けである．

事情は2500年前から変わっていないようで初期の仏典の中にも，釈迦に向かって空間と時間のありようについての問答をぶつける高弟達についての記述が繰り返し見られる．それら弟子達の問いに対する釈迦の対応は「無記＝アヴィヤークリタ（サンスクリット語）」と呼ばれ，微笑みを湛えた沈黙それのみである．なぜ「無記」であるかと食い下がれば，その問いに対しても「無記」であるとしてにべもない．簡単に言うと「キリがないのでやめろ」ということであるが，これは当代思想界における中心課題であったそれら形而上的思索への拘泥を戒め，むしろ人間個人の時間軸の中にある「生老病死」の解決へと知のエネルギーを促したものといえる．

さて現代の我々の学生である．彼らは，さらに熱心，執拗である．果たして無記に納得しない彼らにとっても時空の力学たる相対論の研究者である我々にとっても，本稿は良い機会である．以下，相対論研究者なりの「時間と時間旅行」についての見解を仏罰の当たらない程度に明らかにしたい．

2. 特殊相対論の時間と一般相対論の時間

太古から受け継がれた時間に対する直観は，時間は至るところ同じ速さで進み刻まれていくというものだろう．Newton力学の体系はこの考え方を意識的に採用した．ここでは時間は過去から未来までそれこそ永遠に続き，物理現象とは全く無関係にアプリオリに与えられている．この考え方に対して最初の根本的な修正を行ったのがEinsteinの**特殊相対論**である．ここでは任意の慣性系において光の速さが不変であることが理論の原理として採用され，時間と空間は一体となって**時空**として扱われる．時間の絶対性は失われ，同時刻性すなわち時間座標は観測者に依存する概念となった．これがMinkowski時空である．一方で，時空がアプリオリな入れ物であるという観点はまだNewton力学と共有されている．

ところがこの入れ物が実は自由に曲がり得る可塑的なものであり，その中身の物質の分布と関係してあらためて入れ物の形状が決定され，物理現象もまた入れ物の形状によって左右されるという見方を与えたのが，Einsteinによる**一般相対論**である．つまり，入れ物である時空とその中に入っている物質とは一体として扱われる必要がある．一般相対論により，物理学者は初めて冒頭の時間や空間に対する問いを，りんごが木から落ちるのを記述するのと全く同じ物理法則に基づいて議論することができるようになったのである．

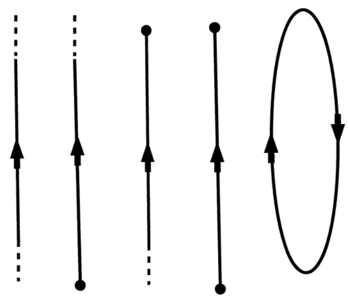


図 1　時間の無限性・有限性.

各点での過去から未来への時間の向きが時空全体に一貫しているとしても，図 1 にあるように時間の無限性・有限性は一意的ではない．(a) では時間は過去にも未来にも限りない．(b) では過去に，(c) では未来に，(d) では過去にも未来にも有限である．(e) では時間が循環的である．

ここで時空における**因果**について簡単に説明しておく（因果はもともと仏教用語である！）．時空とは Lorentz 計量をもつ可微分多様体である．各点における方向ベクトルは時間的・光的・空間的の 3 種類に分類される．さらに時間的および光的ベクトルは未来向きと過去向きに分類される．曲線の接ベクトルが至るところ未来向き時間的または光的であるとき，その曲線を未来向き因果的曲線という．ある時空点 p から発する未来向き因果的曲線によって到達できる時空点全体の集合を p の因果的未来という．過去向き因果的曲線・因果的過去も同様に定義される．p の因果的未来にも因果的過去にも含まれない領域は，p と空間的に離れた領域という．特に Minkowski 時空では因果構造は自明であり単純に p を頂点とする光円錐で理解される．

3. 一般相対論における時空特異点と時間

3.1 宇宙論における時空特異点と時間

観測事実によれば，我々の宇宙の時間発展は空間的一様等方時空である **Friedmann–Robertson–Walker（FRW）時空**によって非常によく近似できる．FRW 時空はたった一つの力学的自由度である宇宙のスケール因子 $a(t)$ で表され，その時間発展は Einstein 方程式から導かれる次の Friedmann 方程式とエネルギー保存則に従う．

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \qquad (1)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \qquad (2)$$

ただし，ここで光速 c が 1 になるような単位系を選ぶこととし，G は重力定数，K は宇宙の空間曲率であり，ρ と p はそれぞれ宇宙のエネルギー密度と圧力である．式 (2) は物質の各成分間に相互作用がなければ各成分について成り立つ．我々の宇宙では ρ は以下のようになる．

$$\rho = \rho_{M,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{R,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{\Lambda,0}. \qquad (3)$$

ここで a_0 は a の現在での値であり，$\rho_{M,0}$, $\rho_{R,0}$, $\rho_{\Lambda,0}$ はそれぞれ，非相対論的物質（$p_M \simeq 0$），相対論的物質（$p_R \simeq \rho_R/3$），宇宙項（$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$）による現在のエネルギー密度である．Wilkinson Microwave Anisotropy Probe（WMAP）[1)]の観測によると，これらの比は $\rho_{M,0} : \rho_{R,0} : \rho_{\Lambda,0} \simeq 0.286 : 0.00005 : 0.714$ であり，$K = 0$ と無矛盾である．以降 $K = 0$ と仮定しよう．

式 (1) と (3) を見ると，$a(t)$ は過去の有限の t の値 t_0 で 0 になることが結論される．$t \to t_0$ で $a \to 0$, $\rho \to \infty$ である．一般相対論では物質のエネルギー密度は時空の曲率と直結しているため，この発散は時空曲率の発散という事態を引き起こす．このような点は**時空特異点**と呼ばれ，時空上の点ではなく時空の境界として定義され，一般相対論の数学的適用限界を示唆する．FRW 時空のこのような特異点は初期特異点または**ビッグバン（大爆発）特異点**と呼ばれ，時間 t の過去方向への有限性を意味している．しばしば誤解されるが，実はインフレーション宇宙論においてもビッグバン特異点は解消されない．

未来方向についてはどうだろうか？ 式 (3) を見ると，宇宙が膨張して a が大きくなっていくと，宇宙項以外の項は減衰してしまうことがわかる．この場合，式 (1) によると a は指数関数的に増大し t はいくらでも大きくなれるので，未来方向につい

ては時間は無限ということになる．しかし，ここでWMAPで宇宙のエネルギーの71.4%を占めるとされた成分（暗黒エネルギーと呼ぶ）が本当に未来永劫一定なのかが問題になってくる．実は，観測データはこの成分の状態方程式を $p_{\mathrm{DE}} = w\rho_{\mathrm{DE}}$ としたときに $w < -1$ の可能性を排除できない．いま w が定数であるとして他の物質との相互作用を無視すると，式(2)より暗黒エネルギーの密度は $\rho_{\mathrm{DE}} \propto a^{-3(1+w)}$ となる．$w < -1$ のときには，式(1)により，ある有限の時刻 t_1 が存在し，$t \to t_1$ のとき $a \to \infty$, $\rho \to \infty$ であることがわかる．このような特異点は**ビッグリップ（大引き裂き）特異点**と呼ばれている[2]．この場合，未来方向にも時間は有限である．もっともビッグリップ特異点が起こるとしても今から数百億年以上も未来の話なのではあるが．

3.2 ブラックホールにおける時空特異点と時間

一般相対論では真空で静的および定常なブラックホール解は一意的にそれぞれ**Schwarzschild解**および**Kerr解**だけである．星などの天体が重力崩壊してこれらのブラックホールができた場合，過去方向には時間は無限であり，通常我々が考える，ブラックホールの外側の観測者にとっては，未来方向にも時間は無限である．しかし，ブラックホールの中に落ちていく観測者にとっては，事情が大きく異なる．

まずSchwarzschildブラックホールの中に落ちていく観測者の場合には，事象の地平線を通り抜けて*1) しばらくすると特異点に突入し，そこは時空の境界である．この特異点に近づくとどんなに小さな物体でもそれに働く潮汐力が無限大になり，物体は完全に潰されてしまう．このため，Schwarzschildブラックホールの中では時間は未来方向には有限であることになる．Kerrブラックホールの中に落ちていく観測者の場合には，時空特異点に衝突する観測者とそうでない観測者がいる．Kerrブラックホールの内部構造は大変複雑でしかも大変奇妙なのだが，ここでそれを詳細に説明する紙数がないので，その重要な性質を列挙するに留める[3~5]．

(1) 局所的に裸で環状の時空特異点．

(2) **時間的閉曲線**の存在．

(3) ブラックホールからホワイトホールに抜ける一方通行のワームホール構造．

(4) この構造が時間的に無限回繰り返される．

性質(1)の局所的に裸の特異点とは，ある観測者の因果的過去に特異点が入るということであり，一般相対論の初期値問題の枠内で時空が完全に決まるとするPenroseの強い**宇宙検閲予想**[3]に反する．性質(2)の時間的閉曲線に沿った観測者は一定の固有時間たってまた同じ時刻同じ場所に戻る．そのような観測者にとっては時間は循環的である．

ただし，最近の研究によって，Kerrブラックホールの内部構造は不安定であり，一般には時空特異点がワームホールを閉ざしてしまうことが強く示唆されている．しかし，この特異点の一部分はそれを超えて時空の拡張を許し，その拡張は初期値問題では決定されないので，やはり強い宇宙検閲予想の反例になる[6]．

3.3 大域的方法による時空特異点と時間

ここまでFRW時空とSchwarzschild時空とKerr時空に限定して話をしていた．しかし，これらの厳密解が現実の一般的な時空特異点を代表する保証はない．ここに大域的因果構造を取り扱うための位相幾何学的方法が大きな役割を果たす．その最も重要な成果が**特異点定理**と呼ばれる一群の定理であり，以下はその代表的な一つである[3,4]．

定理1（Hawking–Penrose） 次の仮定(1)〜(4)がすべて成り立てば，不完備な時間的または光的な測地線が少なくとも一つは存在する：

(1) 強いエネルギー条件．

(2) 曲率に対する一般性条件．

(3) 時間的閉曲線がない．

(4) 次の3つのうち少なくとも一つが成立する：

(a) 宇宙が閉じている．

(b) 捕捉地平線が存在する．

---

*1) 事象の地平線では潮汐力は有限である．

(c)　一点から過去向きに発したすべての光的測地線の膨張率が負になるような点が存在する．

この定理の特筆すべき点は，時空に高い対称性を仮定しないことである．仮定 (1) はエネルギー密度が正であるということで通常の物質では成り立つ*2)．仮定 (4b) は重力崩壊の初期データに対応する．仮定 (4c) が我々の宇宙で成り立つことは宇宙論的観測によってほぼ実証されている．

一方，仮定 (3) が破れるということは，時間は少なくとも部分的には循環的であるということである．また，この定理の結論部にある不完備な測地線とは，測地線のうちそのアフィン長さが有限でかつそれ以上伸ばせないものをいう．時間的測地線についてはアフィン長さは単に固有時間である．従って，この定理を意訳すれば，宇宙の時間は少なくとも部分的に未来または過去に有限であるかそれとも循環的であるということである．

物理学は宇宙の一切を合理的に記述する営みなので，時空特異点も物理法則によって合理的に記述されると考えるのは，傲慢かもしれないが物理学者の信念である．実際，特異点を回避して時間の無限性を回復する試みは数多ある．それらには一般相対論からの逸脱が必要になる．しかし，我々は，特異点近傍での重力法則が一般相対論からどのように逸脱するのかについて確実なことは何もわからない．実験的基礎がはっきりした古典的一般相対論と曲がった時空上での物質場の量子化の枠内にこの問題を収めておくのが，釈迦の教えを守ることにあたるのかもしれない．

4. ワームホールとタイムマシンとトポロジー

4.1 時間旅行の魅力

ここまでで我々の宇宙において，総体的な時間の流れがあることがわかった．では，次にその我々の時間は我々の個人の時間として，到るところ首尾一貫しているものなのかを論じたい．何のことかというと，具体的には**タイムマシン**のような**時間旅行**を実現する機器が果たして実現可能かどうかである．

時間旅行について質問してくる学生は多い．そのときに，まずオウム返しに聞き返すのだが，「その時間旅行とは一体何をすることなのだろうか？」きまって学生は「時間を未来や過去に旅すること」などと答えるのだが，「なら，あなたは今未来に向かって時間旅行をしているのではないか？」彼は大いに不満顔で辟易とするかもしれないが，落ち着いて考えれば当り前のことである．そもそも我々は恒に人生を過去から未来へと旅しているのであり，つまり未来への時間旅行は自明に可能なのである．むしろ時間旅行をしないのは不可能と言うべきであろう．

個人の時間旅行の継続時間は有限（$\simeq$ 100 年？）であるが，因果的未来のあらゆる事象に対して我々は恒にアクセス可能である．なぜなら，相対論的には，それに要する個人の時間は利用した時空内経路の固有時間で決まるからである．光速に近づけば固有時間はゼロに近づくので将来人類が亜光速航法*3)を手に入れた暁には未来への旅行を自由に行えるようになるはずである．このことは特殊相対論においてさえ全く自明なこと*4)であるので議論を要しない．

問題は因果的過去の事象や空間的に離れた事象である．しかし実は空間的に離れた事象は「過去のある事象の未来」にあるので，もし過去への時間旅行が可能であればすべての時間旅行が可能であるということになる．回りくどかったが，以下過去への時間旅行の可能性について一般相対論と微分位相幾何学の立場から議論することにする．

4.2 Thorne の時間旅行

1988 年 Thorne によって学術的な見地から次のような時間旅行のアイデアが提唱された[7]．

(1)　非自明な空間的経路（**ワームホール**）を用意

*2)　ただし量子論的効果を考慮すると仮定 (1) は破れる可能性がある．

*3)　速やかに亜光速を達成し，また速やかに停止，再び逆方向へ亜光速を達成することができる技術が必要である．

*4)　双子のパラドクスとして知られるが，これは理論に矛盾があるという意味では全くない．

する．

(2) ワームホールの出口を加速させ入口の時間に対して相対的な時間の遅れ*5)を起こさせる．

(3) 十分な時間の遅れが起きるとワームホールの入口から見て出口は因果的過去になるので時間的閉曲線が生じたことになる．

(4) これをタイムマシンと名付けて，ワームホールを通って過去へ行く．

このアイデア*6)については，当初から多くの批判が寄せられた．特に議論されたのは，ワームホールの構造の維持には**負のエネルギー密度**が必要であるということであった．他にもいろいろな時間旅行のアイデアがあるが，どの方法も本質を微分位相幾何学的に抽出すれば，非自明な**トポロジー**（ワームホール）と大域的因果構造の変化（時間的閉曲線の発生）に帰着する．現在では空間のトポロジー論については，Perelman によって Thurston の幾何化予想[9)]とその系としての Poincaré 予想が証明されて，多くのワームホールの構造を構想することが可能となった．ここでは深入りは避けておくが往々にして負のエネルギー密度さえあればワームホールは可能であるという感じである．負のエネルギー密度は古典物理では現実的でないが量子論においては可能であり，これは技術的には乗り越えられない壁ではなさそうである．

その後 1991 年，Hawking によって**時間順序保護予想**が提唱されタイムマシンの建設は否定された．これはタイムマシンつまり時間的閉曲線を発生させる瞬間に時空の量子効果により無限大の摩擦力が発生してそれ以上のプロセスには無限のエネルギーが必要になってしまう，という主張である．Hawking はこれを曲がった時空上の場の理論に則して議論をした．しかし，この問題には正しくは**量子重力理論**による議論が必要であるので現在の時点において決着が付いているとは言い難い．

*5) 日本ではウラシマ効果と呼ばれることがあるが学術的な用語にはなっていない．

*6) 実はこのアイデアではタイムマシンができる以前の過去に行くことはできない．これは因果律から当然である．従ってタイムマシンができる以前の過去に行ってタイムマシンの建設を妨害するといったような矛盾は起こらない．

4.3 宇宙のトポロジーと時間旅行

楽天的に考えればワームホールをタイムマシン化することは未来の人類には可能かもしれない．ではそもそもそのワームホールを用意することが原理的に可能なのであろうか？

時空に対して各点において時間の矢（時間的ベクトル）が定義されていると仮定する．このとき，位相幾何学における有名な Poincaré–Hopf の定理[10)]が適用できる．定理をこの問題にあてはめて解釈すれば

> **定理 2**（Poincaré–Hopf） 宇宙に淀みない時間の流れが存在するならば，ワームホールが形成されるようなトポロジーの遷移が起きたとしても，時空の Euler 数はゼロでなければならない．

直感的に言って Euler 数は空間のトポロジー的な穴の数であるので時空のトポロジーが非自明になればなるほど Euler 数がゼロになるとは考えにくい．しかし 4 次元の微分位相幾何学においてはこの Euler 数をゼロにするマジックがある．それは「空間の手術」というもので 4 次元球体を取り除いて 4 次元トーラスや複素射影空間とつなぎかえて戻すというものである．これによって Euler 数を調整することができるのでワームホールの創出は Poincaré–Hopf の定理によっては制限を受けない．ところが時空の大域的因果構造について考えるとき条件は厳しくなる．

> **定理 3**（Geroch[11, 12)]） トポロジーが遷移するのならば時間的閉曲線がある．さらにエネルギー条件が満たされているのなら時空特異点が発生する．

つまり，古典的にワームホールを用意しようとするとそれはトポロジーの遷移であるので，その前提として時間的閉曲線がなければいけなかったことになる．しかし時間的閉曲線とはまさにタイムマシンであるので，タイムマシンを作るためにワームホールを用意しようとすると，それを作るために今度はタイムマシンが必要であるということになってしまい，これでは全く役には立たない．そ

れぱかりかエネルギー条件が満たされているとすれば時空特異点まで現れてしまいそれどころではないのである．そうなると，最初から我々の宇宙にワームホールがあったと考えれば良いのかもしれないが，宇宙背景輻射のパターンに非自明トポロジーの痕跡は現状では見つかっていない．

かなり楽天的な議論を行ってきたが古典的にはタイムマシン建設のためにワームホールを用意することは原理的に難しそうである．

Geroch の定理によって大域的に淀みない古典的な時間の概念とワームホールを生み出すようなトポロジーの遷移は相いれないことがわかった．そこで今度は局所的には古典的時間の概念を放棄することにする．もともと負エネルギー密度を得るために物質については量子論的効果を当てにしていたので，行きがけの駄賃である．具体的には量子重力的**トンネル効果**によって量子ワームホールを創り出す．もちろん量子重力理論は完成していないのであるが，Gibbons と Hartle は量子重力トンネル効果を準古典的 WKB 近似の観点から取り扱い，量子トンネル効果を表す重力インスタントン解についての条件を与えた．

定理 4（Gibbons–Hartle[13]）　時空のトンネル効果が起こるとき空間はいったん静止した状態になる．そしてそこで時空がきれいにトンネルを通り抜けるとするならばどこかで宇宙の曲率が負にならざるを得ない．

トポロジーの遷移を起こすためには時空はトンネルを入口から別のトポロジーである出口へと通り抜けなければならない．もちろん量子効果を考えているので負の曲率や負のエネルギー密度にそれほど抵抗は無いかもしれない．実際そのような負曲率と関連したトポロジー遷移トンネル解は Lobachevski 幾何を使って構成されていて[14]，前出の Thurston の幾何化予想に準拠したものであることも面白い．とにかく量子トンネル効果次第でワームホールは創出可能かもしれない．しかし「量子重力さえ仮定すればタイムマシンでも何でも可能」といった結論はなんだか少し残念な感じではある．

5. まとめと議論

Newton 力学・特殊相対論においてアプリオリであった時空は，一般相対論において物質と相互作用する物理的実体になった．一般相対論の枠組みでは，時空特異点と時間の有限性が対応し，時間の循環性も自然に現れる．時間の循環性すなわちタイムマシンの作成には量子重力理論が本質的になる．

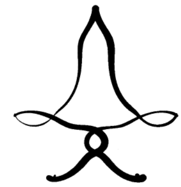
最後は何を主張しているかはっきりしなくなってきたが，負のエネルギー密度と量子重力理論といったまだ良くわからないことに話が移ってしまった．これではいわゆる古典力学と一般相対論の枠組みでは思考停止に陥ってしまったともいえよう．わからないものを明らかにしようとするとまた別のわからないものが生まれてくる．科学とは本来そういうものではあるが，いったい釈迦の言っていた無記とはこういったことだったのかどうなのか？やはりお釈迦様の説法はありがたいものである．

参考文献

1) http://map.gsfc.nasa.gov/
2) R.R. Caldwell, M. Kamionkowski and N.N. Weinberg: *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003).
3) R.M. Wald: “General Relativity”, Chicago University Press, Chicago (1984).
4) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis: “The Large scale structure of space-time”, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
5) 佐藤文隆・小玉英雄：『一般相対性理論』，岩波書店 (1992).
6) M. Dafermos and I. Rodnianski: *Invent. Math.* **162**, 381 (2005).
7) キップ・S・ソーン：『ブラックホールと時空の歪み—アインシュタインのとんでもない遺産』，白揚社 (1997).
8) S.W. ホーキング：『時間順序保護仮説』，NTT 出版 (1991).
9) W.P. サーストン：『3 次元幾何学とトポロジー』，培風館 (1999).
10) J. ミルナー：『モース理論』，吉岡書店 (2004).
11) R.P. Geroch: *J. Math. Phys.* **8**, 782 (1967).
12) F.J. Tipler: *Ann. of Phys.* **108**, 1 (1997).
13) G.W. Gibbons and J.B. Hartle: *Phys. Rev.* **D42**, 2458 (1990).
14) Y. Fujiwara, S. Higuchi, A. Hosoya, T. Mishima and M. Siino: *Prog. Theor. Phys.* **87**, 253 (1992).

（はらだ・ともひろ，立教大学理学部）
（しいの・まさる，東京工業大学大学院理工学研究科）

弦理論と時間



土屋　麻人

1. はじめに

本特集のテーマは「時間」ということだが，素粒子の究極の理論であると期待されている弦理論[1)]において，時間の持っている「地位」は非常に興味深い．そのことを伝えるのが本稿の目的である．本稿の最後では，弦理論において空間は「創発」することが近年明らかになってきたが，はたして時間は「創発」するのかという問題を考えたい．まずは，弦理論の話をする前に「質点の力学」から始めて必要なことを順番に説明していこう．

2. 質点の力学

質量 m の自由な質点を考え，その位置を慣性系 Σ のデカルト座標 (x, y, z) で表す．ここで，後の便利のために $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ とおく．系の**作用**は

$$S_{\mathrm{p}} = \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2 dt \qquad (1)$$

で与えられる．この作用を $\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ の条件の下で x^i で変分する，すなわち $x^i(t)$ を $x^i(t) + \delta x^i(t)$ に微小分ずらしたときの作用の変化分を考えることによって，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^i/dt)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

が得られ，それはニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} = 0 \qquad (2)$$

に等しい．

(1) において，$x^i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ は時間 t の関数であり，座標 x^i は**力学変数**，すなわち運動方程式を導出するにあたり，それによって作用を変分するものであるが，一方時間 t はパラメータである．このように，時間と空間の扱いが対等でないのだが，これは非相対論的には構わない．図 1 のように，時刻 $t = 0$ で慣性系 Σ と重なっていて，慣性系 Σ に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動する慣性系 Σ' を考え，Σ' 系の座標系を $(x', y', z') = (x'^1, x'^2, x'^3)$ とすると，Σ' 系と Σ 系は非相対論では**ガリレー変換**で結ばれる．

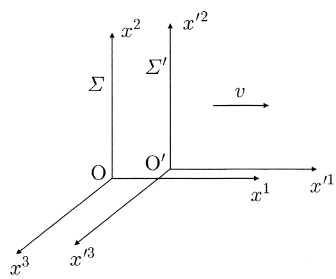


図 1　2 つの慣性系．

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1 - vt, \qquad (3)$$
$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

ここで，t' は Σ' 系における時間であり，非相対論では自明に Σ 系の時間 t に等しい．運動方程式 (2) や作用 (1) が変換 (3) の下で不変であることはすぐに確認できる．

3. 相対論的粒子

相対論の場合，ガリレー変換 (3) は**ローレンツ変換**

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (4)$$
$$x'^2 = x^2, \ x'^3 = x^3$$

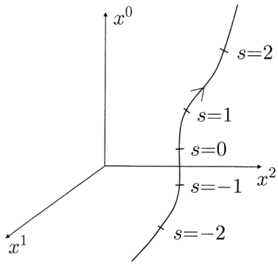


図2　相対論的粒子の軌跡.

にとって代わられる．ここで，c は光速度であり，$x^0 = ct$ とおいた．以下，時間と言ったときは x^0 を指すものとする．$v/c \to 0$ のとき，確かにローレンツ変換 (4) はガリレー変換 (3) に帰着する．

ローレンツ変換 (4) において，時間と空間は「対等」に扱われており，作用 (1) は明らかにこの下で不変でない．相対論的に不変な理論形式を作るには，時間と空間を「対等」に扱う必要があるが，1つの方法は非相対論的粒子の場合はパラメータであった時間 x^0 を空間 x^i と同様の力学変数に「昇格」させることである．具体的には，パラメータ s を用いて，粒子の世界点（ミンコフスキー空間での座標）を

$$(x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s)) \tag{5}$$

と表す．こうすると，図2のように，s を動かすことにより，粒子の時空間での軌跡が得られる．これを粒子の**世界線**という．図2では，空間の x^3 方向は書けないので省かれている．

こうして，時間と空間の扱いは対等になったので，次にローレンツ変換で不変な作用を書き下そう．まず，

$$\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -(\dot{x}^0)^2 + (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \tag{6}$$

はローレンツ不変であることに着目する．ここで，$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ であり，上下に同一の添字については0から3の和をとるというアインシュタインの規約を採用している．**ミンコフスキー空間**の**計量** $\eta_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} &\eta_{00} = -1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \\ &\text{その他の } \eta_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．また，$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ である．読者は (4) の両辺を s で微分して，(6) が不変であることを陽にチェックできる．

さて，

$$S_{\mathrm{rp}} = -mc\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\,ds \tag{8}$$

の形の作用を考える．これはローレンツ変換の下で不変である上に，パラメータ s の再定義（**一般座標変換**）の下で不変である．すなわち，任意の単調増加関数 f を用いて $s' = f(s)$ としても作用 (8) は不変である．元々，パラメータ s は人間が勝手に粒子の軌跡を表すために導入したもので，理論はこのとり方に依ってほしくなかったので，これは望ましい性質である．作用 (8) はミンコフスキー空間における粒子の世界線の長さ（の $-mc$ 倍）あるいは粒子の固有時間（の $-mc^2$ 倍）という物理的意味を持ち，これからも s のとり方に依らないことがわかる．この事実は自由度的にはそうする必要はなかったのだが，x^0 を昇格させて力学的自由度にしたことで，「余計」な自由度が生じてしまったということもできる．以下に見るようにこの「余計」さは消すことができる．

ここで，$f(s) = x^0(s)/c$ とおくと，$s' = t$ となる．これを定常ゲージ (static gauge) と言う．これによって，1次元の一般座標変換不変性という**ゲージ不変性**を**ゲージ固定**したことになる．このとき，

$$S_{\mathrm{rp}} = -mc\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i(t)}{dt}\right)^2}\,dt$$

となり，$dx^i/dt \ll c$ のとき，$S_{\mathrm{rp}} = -mc^2(t_2 - t_1) + S_{\mathrm{p}}$ となる．ここで，S_{p} は (1) にある質点の作用であり，作用 (8) は正しい非相対論的極限を持つ．

時間と空間を「対等」に扱って，相対論的に不変な理論形式を作るもう1つの方法は，時間も空間もすべてパラメータにしてしまうことである．これは**場の理論**を考えるということである．例えば，x^0, x^1, x^2, x^3 の関数 $\phi = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ をローレンツ変換の下で不変な**スカラー場**であるとする．すなわち，$\phi'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ である．このとき，

$$S_{\mathrm{f}} = \int d^4x\left(-\frac{c}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\frac{m^2c^3}{\hbar^2}\phi^2\right)$$

はローレンツ不変な場の作用であり，$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ が力学変数で，x^0, x^1, x^2, x^3 はパラメータである．この理論を量子化することにより，確かに質量 m の相対論的な自由粒子が得られる．これは，自由場の量子論であり，(8) の理論を量子化したものと等価になる．

4. 非相対論的弦の古典論

さて，話を粒子（質点）から弦に移そう．まず，非相

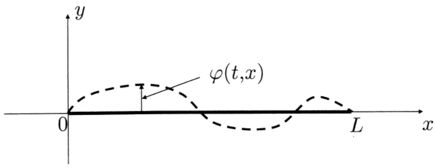


図 3　古典的な弦.

対論で考える．今，線密度 ρ で長さ L の弦を x 軸上の $x=0$ と $x=L$ に両端を固定する（図 3 参照）．このときの弦の張力を T とする．弦の振動の振幅は小さく，y 方向に変位するとする．この弦の変位を $\varphi(t,x)$ で表す．弦の $x \sim x+dx$ 部分の張力によるエネルギーは

$$T\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}-1\right)dx \approx \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx$$

であり，運動エネルギーは $\rho(\partial\varphi/\partial t)^2 dx/2$ であるから，この系の作用は

$$S_{\rm s}=\int dt\int_0^L dx\left(\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\frac{T}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right) \tag{9}$$

で与えられる．この作用を φ で変分し，$\delta\varphi(t,0)=\delta\varphi(t,L)=0$ の境界条件を用いると，**波動方程式**

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{10}$$

が得られる．ここで，$v=\sqrt{T/\rho}$ は波の伝わる速さである．

5. 相対論的弦の古典論

次に相対論的弦理論に話を移そう．以下では**自然単位系** $c=1,\ \hbar=1$ で考える．ここでは D 次元ミンコフスキー空間内の開いた弦を考える．D 次元ミンコフスキー空間の計量 $\eta_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,\cdots,D-1)$ は 4 次元の計量 (7) の拡張として，

$$\begin{aligned}&\eta_{00}=-1,\quad \eta_{11}=\cdots=\eta_{D-1D-1}=1,\\ &\text{その他の } \eta_{\mu\nu}=0\end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる．3 節でミンコフスキー空間内の粒子の軌跡は曲線になることを見たが，今度は点粒子ではなく弦を考えているので，その軌跡は図 4 のように一般に 2 次元の曲面からなることがわかるだろう．これを弦の**世界面**という．この図でも x^3 から x^{D-1} までは

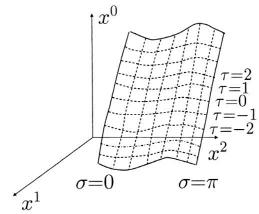


図 4　開弦の軌跡.

書けないので省かれていることに注意しよう．

相対論的であるように，x^0 から x^{D-1} まで対等に扱う．よって，粒子の場合に倣って，この世界面を 2 つのパラメータ τ,σ でパラメトライズしよう．言い換えると，この世界面上に曲線座標を張ることになる．通常 $-\infty<\tau<\infty,\ 0\le\sigma\le\pi$ ととる．そうすると，この曲面上の各点のミンコフスキー空間における座標は $(X^0(\tau,\sigma),X^1(\tau,\sigma),\cdots,X^{D-1}(\tau,\sigma))$ というように，D 個の 2 変数関数で表される．言い換えると，この D 個の 2 変数関数により (τ,σ) の 2 次元空間から D 次元ミンコフスキー空間への写像が定義される．以下，開弦の境界条件として**ノイマン条件**

$$X'^{\mu}(\tau,0)=X'^{\mu}(\tau,\pi)=0 \tag{12}$$

をとる．

粒子の場合の作用 (8) の一般化として，弦の作用は世界面の面積に比例すると考えるのが自然である．$\sigma^0=\tau$, $\sigma^1=\sigma$ として，世界面上の**誘導計量** h_{ab} $(a,b=0,1)$ を

$$h_{ab}=\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^b}$$

によって定義し，これを 2×2 の行列とみなしたときの行列式

$$\det(h_{ab})=(\dot X^\mu)^2(X'^\nu)^2-(\dot X^\mu X'_\mu)^2 \tag{13}$$

を考える．ここで，$\dot X^\mu=\partial X^\mu/\partial\tau$, $X'^\mu=\partial X^\mu/\partial\sigma$, $(\dot X^\mu)^2=\eta_{\mu\nu}\dot X^\mu\dot X^\nu$ などである．D 次元ユークリッド空間では，微小ベクトル $dv_1^\mu=(\partial X^\mu/\partial\tau)d\tau$ と $dv_2^\mu=(\partial X^\mu/\partial\sigma)d\sigma$ の間のなす角を θ とすると，(13) の右辺 $\times(d\tau d\sigma)^2$ は $|dv|^2|dv_2|^2-(dv_1\cdot dv_2)^2=(|dv_1||dv_2|\sin\theta)^2$ と書けるから，これはこの 2 つの微小ベクトルの張る微小 2 次元面の面積の 2 乗に等しいことがわかる．ミンコフスキー空間でも同様に考えれば，相対論的弦の作用は

$$S_{\rm rs}=-T\int d\tau d\sigma\sqrt{-\det(h_{ab})} \tag{14}$$

と書けることがわかる．ここで，T は以下の議論より弦の張力に等しいことがわかる．(13) はローレンツ変換の下で不変だから，この作用もローレンツ変換の下で不変である．

粒子の場合と同様に，作用は世界面上の座標の一般座標変換

$$\sigma'^a = f^a(\sigma^0, \sigma^1) \quad (a = 0, 1) \tag{15}$$

の下でも不変であってほしい．ここで，f^a は σ^0, σ^1 の任意関数である．これは，

$$h'_{ab} = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \sigma'^a}\frac{\partial \sigma^d}{\partial \sigma'^b} h_{cd}$$

より，

$$\det(h'_{ab}) = \left(\det\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma'}\right)\right)^2 \det(h_{ab})$$

であることに注意すると確認できる．

粒子のときのように，この一般座標変換不変性を

$$\sigma'^0 = X^0(\sigma^0, \sigma^1), \ \ \sigma'^1 = X^1(\sigma^0, \sigma^1) \tag{16}$$

によって固定しよう．これが弦に対する定常ゲージである．このとき，$\partial X/\partial \sigma$ の 2 次までとると，

$$\det(h_{ab}) = -1 + \sum_{i=1}^{D-1}\left(\left(\frac{\partial X^i}{\partial X^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^i}{\partial X^1}\right)^2\right)$$

であり，$\varphi = X^2$, $X^i = 0$ $(i = 3, \cdots, D-1)$, $\rho = T$ と対応させると，$S_{\rm rs}$ は定数 $+S_{\rm s}$ に帰着している（ただし，境界条件は今異なっている）．ここで，$S_{\rm s}$ は (9) の非相対論的弦の作用である．これより，T は張力であることが確認できた．

粒子のときは，時間と空間を対等に扱い，相対論的不変性を保障するものとして場の理論があったが，これの弦の場合の対応物は**弦の場の理論**である．D 次元ミンコフスキー空間内の弦の配位はパラメータ s で $X^\mu(s)$ のように記述されるが，弦の場は $\Phi = \Phi[X^0(\cdot), X^1(\cdot), \cdots, X^{D-1}(\cdot)]$ のように弦の配位の汎関数である．

6. 弦の量子論

弦を量子化してみよう．このために，弦の世界面上の一般座標不変性 (15) を定常ゲージ (16) をとる代わりに，以下の条件をおいて固定するのが便利である．これを**共形ゲージ**という．

$$(\dot{X}^\mu)^2 + (X'^\mu)^2 = 0, \ \ \dot{X}^\mu X'_\mu = 0. \tag{17}$$

これにより，作用 (14) は X についての 2 次の簡単な形に帰着する．

$$S_{\rm rs} = \frac{T}{2}\int d\tau d\sigma ((\dot{X}^\mu)^2 - (X'^\mu)^2). \tag{18}$$

τ を「時間」として，これを量子化しよう．このやり方の利点はローレンツ不変性を明白に保てることであるが，**フォック空間**に非物理的状態が含まれてしまう煩雑さも生じる．X^μ の**正準共役運動量**は $P_\mu = T\dot{X}_\mu$ で与えられる．ハミルトニアンは

$$H = \int d\sigma \left(\frac{1}{2T}(P^\mu)^2 + \frac{T}{2}(X'^\mu)^2\right) \tag{19}$$

となることがわかる．**正準交換関係**は

$$[X^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma') \tag{20}$$

と設定され，ハイゼンベルグ方程式 $\dot{X}^\mu = i[H, X^\mu]$, $\dot{P}^\mu = i[H, P^\mu]$ は (18) から導かれる運動方程式

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \tag{21}$$

に一致する．これは各 μ について波動方程式 (10) で $v = 1$ としたものである．

この方程式はノイマン条件 (12) を考慮して，モード展開の形ですぐに解ける．

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\cos n\sigma.$$

ここで，$l = 1/\sqrt{\pi T}$ であり，(20) から

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0} \tag{22}$$

と結論される（第 2 式の δ はクロネッカーのデルタ）．1 番目の交換関係からわかるように，p^μ は $X^\mu(\tau, \sigma) \to X^\mu(\tau, \sigma) + c^\mu$（$c^\mu$ は定数）という並進の生成子であり，弦の重心の運動量と解釈される．

弦の世界面上で光円錐座標を $\sigma^+ = \tau + \sigma$, $\sigma^- = \tau - \sigma$ で定義すると，共形ゲージの条件 (17) は

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_{\sigma^+}X^\mu\partial_{\sigma^+}X_\mu = 0, \\ T_{--} &= \partial_{\sigma^-}X^\mu\partial_{\sigma^-}X_\mu = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

と表現される．しかし，これは量子論的には満たせない条件であり，代わりに**物理的状態** $|\phi\rangle$ に対して，

$$\langle\phi|T_{\pm\pm}|\phi\rangle = 0 \tag{24}$$

を課す．$T_{\pm\pm}$ のフーリエモードは

$$L_m = T\int_0^\pi d\sigma (e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{\mu}_{m-n} \alpha_{\mu\, n} \tag{25}$$

であり，(24) は

$$\begin{aligned} &(L_0 - a)|\phi\rangle = 0, \\ &L_m|\phi\rangle = 0 \quad (m > 0) \end{aligned} \tag{26}$$

を課すことで満たされる．ここで，$\alpha^{\mu}_0 = lp^{\mu}$ であり，定数 a は L_0 を定義するときの正規積順序の不定性からくる．(22) と (26) を使うと，L_m は**ヴィラソロ代数**

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)$$

を満たすことが示せる．

(23) は世界面上の一般座標変換 (15) のうち特殊なものである

$$\sigma'^{+} = f^{+}(\sigma^{+}), \quad \sigma'^{-} = f^{-}(\sigma^{-}) \tag{27}$$

の下で不変であり，理論はまだこの変換の下で不変である．ここで，$f^{\pm}$ は任意関数であり，変換 (27) は**共形変換**と呼ばれる．すなわち，これは一般座標変換のうちゲージ固定条件 (17) では固定しきれなかった**残留ゲージ対称性**に相当する．L_m はこの**残留ゲージ変換**の生成子とみなせる．

さて，運動量の固有状態 $|0; k^{\mu}\rangle$ を $p^{\mu} = k^{\mu}|0; k^{\mu}\rangle$, $\alpha^{\mu}_m|0; k^{\mu}\rangle = 0$ $(m > 0)$ で定義すれば，α^{μ}_m $(m < 0)$ をこれにかけて得られるもの（フォック空間の状態）のうち条件 (26) を満たすものが物理的状態になる．さらに，

$$L_0 = \frac{l^2}{2} p^{\mu} p_{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\mu}_{-n} \alpha_{\mu\, n}$$

であることに注意すると，質量が一番小さい状態は $|0; k^{\mu}\rangle$ で質量の 2 乗は $-k^{\mu}k_{\mu} = -2\pi Ta$ である．次に質量が大きい状態は $\zeta_{\mu}\alpha^{\mu}_{-1}|0; k^{\mu}\rangle$ であり，質量の 2 乗は $-k^{\mu}k_{\mu} = 2\pi T(1-a)$ である．この状態に L_1 をかけて消えることより，$\zeta_{\mu}k^{\mu} = 0$ という条件が得られる．実は，$D = 26$, $a = 1$ のときのみ理論が矛盾ないことが示せて，前者の状態は**タキオン**であり，後者の状態は質量なしのベクトル粒子で $U(1)$ のゲージ場に対応している．後者には 24 個の横波モードと 1 個の縦波モード（$\zeta^{\mu} \propto k^{\mu}$）がある．縦波のノルムはゼロであり，S 行列には効かない．このように，開弦の理論は**ゲージ場**を含む．一方，閉弦の理論は**重力場**を含むことが知られている．また，ここで現れたタキオンは**超弦理論**にいくと現れない．ここで見たように，量子化の際に用いた世界面上の「時間」τ の痕跡は期待通り物理的結論には現れない．

弦の量子化ではもう 1 つ別の時間の扱い方が可能だ．(27) は $\tau' = \frac{1}{2}(f^{+}(\tau+\sigma) + f^{-}(\tau-\sigma))$ を意味するから，τ' は波動方程式 (21) を満たす．したがって，$X^{+}(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^{D-1}) = x^{+} + l^2 p^{+}\tau$ によって，残留ゲージ対称性を固定できる．そして，x^{+} を時間として量子化する．すなわち，標的空間の**光円錐時間**が時間となる．このゲージを**光円錐ゲージ**といい，理論のローレンツ不変性は明白でなくなるが，はじめからフォック空間はすべて物理的なものになる利点をもつ．

7. 弦理論において時間は創発するか

近年，弦理論において，空間は創発され得るものであると認識されている．

例えば，近年の弦理論の研究においては，**AdS/CFT 対応**[2] あるいは広く**ゲージ重力対応**が中心課題の 1 つであるが，そこにおいて空間は創発される．具体的に AdS/CFT 対応の典型例である $N = 4$ $SU(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論と $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論（超重力理論）の等価性の予想を考えてみよう．この対応においては，AdS_5 の境界の 4 次元時空がゲージ理論である $N = 4$ $SU(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論が住んでいる 4 次元時空に対応する．AdS_5 のもう 1 次元の動径方向はこのゲージ理論の繰り込み群のスケールに対応することが，**UV/IR 関係**[3] として知られている．また，S^5 はこのゲージ理論に存在する 6 個の随伴表現のスカラー場の固有値がつくっていると解釈も可能である[4]．こうして，4 次元のゲージ理論から見れば，これが 10 次元の弦理論を記述し，6 次元分が出現し（創発され）たことになる．また，他の例として，**非臨界次元の弦理論**を非摂動論的に定義する**行列模型**においては，行列の固有値から弦の標的空間の 1 次元分の空間が創発されることが見てとれる[5]．

一方，時間に関しては事情は非自明である．ここでは，この可能性を探るため，超弦理論の非摂動論的定式化であると期待されている **IIB 行列模型**[6] を考えよう．この模型は次の作用で定義される．

$$S = -\frac{1}{g^2} \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{4}[A_{\mu}, A_{\nu}]^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma^{\mu}[A_{\mu}, \Psi] \right).$$

ここで，$\mu, \nu = 0, 1, \cdots, 9$ である．A_{μ} と Ψ はそれぞれボソン的，フェルミオン的な $N \times N$ のエルミー

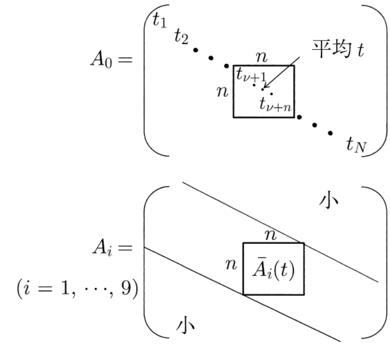


図 5　帯状対角的な構造と時間発展の概念.

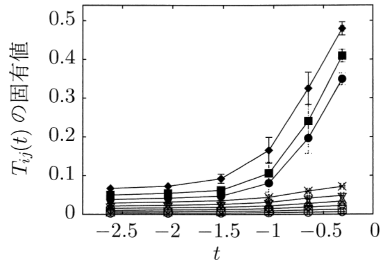


図 6　$T_{ij}(t)$ の 9 個の固有値の時間依存性. $N = 16$, $n = 4$.

ト行列であり, A_μ は $9+1$ 次元のベクトルであり, Ψ はマヨラナワイルフェルミオンである. $N \to \infty$ の極限をとることにより, 模型は定義される. この模型と **IIB 型超弦理論**との対応から, A_μ (の固有値) が時空に対応していることがわかる. 超弦理論が元々 9+1 次元で定義されることから, A_μ が 10 個あるが, 0 次元の模型で時空はアプリオリには存在せず, ここから, 非摂動論的に 3+1 次元の時空が得られるかどうかはダイナミクスの問題になる.

以下にこの模型についてのモンテカルロシミュレーションによる研究の結果[7]を述べる. 時間発展を見るために, A_0 を対角化する基底をとる. A_0 の固有値 t_a $(a = 1, \cdots, N)$ は $t_1 < \cdots < t_N$ の順序を持つようにする. t_a はシミュレーションの配位ごとに決まり, 最終的に平均をとる. この基底での空間方向の行列 A_i $(i = 1, \cdots, 9)$ は対角的でないが, シミュレーションの結果は非対角要素は対角要素から離れるにしたがって, 急速に小さくなることを示している. この帯状対角的な構造の帯の幅を n としよう. 概念図を図 5 に示している. これから, 図 5 にあるような $n \times n$ の対角ブロック行列 $\bar{A}_i(t)$ を定義することが自然に見える. ここで, t は対応する A_0 のブロックにおける n 個の固有値の平均, すなわち $t = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} t_{\nu+a}$ $(\nu = 0, \cdots, N-n)$ である. $\bar{A}_i(t)$ の t 依存性は滑らかになっていることがシミュレーションの結果より確かめられた. また, A_i の帯状対角的な構造は時間的な局所性を保証している. こうして,「時間発展」の概念がダイナミカルに出てきた. これは, 非自明なダイナミカルな結果である. $\bar{A}_i(t)$ は時刻 t での 9 次元空間の構造を表すと解釈される.

そこで, 時刻 t での空間の形状を表すであろう 9×9 正定値実対称行列を $T_{ij}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\bar{A}_i(t)\bar{A}_j(t))$ で定義する. これは慣性モーメントテンソルの類似物である. 図 6 に, $T_{ij}(t)$ の 9 個の固有値を t に対してプロットしている[*1]. 9 個のうち 3 個の固有値が臨界時刻 t_c で成長を始める.

このように, 時間と空間が創発して膨張する $3+1$ 次元時空がダイナミカルに生成されると解釈し得る面白い結果が得られた. 最終的には模型の中での幾何 (計量) の読み取り方を見出す必要がある[8]. 今後の発展に期待したい.

*1) 理論は $t \to -t$ の下での対称性をもっているので, $t < 0$ の領域だけを示している.

参考文献

1) 弦理論の基礎的な解説として, 今村洋介『超弦理論の基礎—弦とブレーンの導入から』数理科学 SGC ライブラリ 80, サイエンス社, 2011 年.
2) J.M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999). レヴューとして, O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000).
3) L. Susskind and E. Witten, hep-th/9805114.
4) H. Lin, O. Lunin and J.M. Maldacena, *JHEP* **0410**, 025 (2004); S. Corley, A. Jevicki and S. Ramgoolam, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5**, 809 (2002); D. Berenstein, *JHEP* **0407**, 018 (2004); Y. Takayama and A. Tsuchiya, *JHEP* **0510**, 004 (2005).
5) 行列模型における時空の創発についてのレヴューとして, 土屋麻人『弦理論と行列模型—弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方』数理科学 SGC ライブラリ 104, サイエンス社, 2014 年.
6) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B* **498**, 467 (1997).
7) S.W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 011601 (2012).
8) 興味深い提案として, M. Hanada, H. Kawai and Y. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1295 (2006).

(つちや・あさと, 静岡大学大学院理学研究科)

拡張ミンコフスキー空間での時間

松下　泰雄

1. 古典力学での時間

1905年の特殊相対論以前は,「時間」は絶対時間で, 流れは一方向であり,『…“より前” および “より後” という規準に従って配列されていると思われる』(アインシュタイン)[2)]というように信じられていた. 感覚的には, 絶対時間と一方向の流れの2つが時間の特徴であろう.

さてニュートン力学における運動方程式は時間に関して可逆である. すべての運動方程式は時間 t を $-t$ に変更しても運動方程式は実際起こり得る方程式となる. ニュートン力学では, 時間の流れの方向を決める基準は存在しない. 時間発展を記述する方程式だと思ってもそれは「逆発展方程式」としても市民権を持つ. それは, 様々な法則の定式化のほとんどが「等式」で, そこには順序または方向という概念が入る余地はない.

しばしば「熱力学の第2法則」が時間の流れの方向を定める基準であるといわれる. これは等式ではなく不等式による法則なので「方向」を決めることができる. しかし, これは巨視的な系の時間経過についてのことで, 運動方程式に対しての時間の向きを決める基準になるとは思われない.

2. ミンコフスキー空間(1908)に至るまで…

相対論を象徴する因子として, 光速 c と粒子の速度 v に対して $\sqrt{1-v^2/c^2}$ がある. この因子に着目して, 特殊相対論(1905)およびミンコフスキー空間(1908)へ至るステップを簡単にまとめると次のようになるだろう.

- 1881[6)]-マイケルソン, 1887[7)]–1929-マイケルソン–モーレイ：静止エーテル（光の伝播の媒質）に対する地球の運動の検出の試み[*1)*2)].
- 1889[3)]-フィッツジェラルド, 1892[4)], 1895[5, 10)]-ローレンツ：マイケルソン–モーレイの実験を説明するために長さの短縮を仮説として提唱.
- 1905[1, 10)]-アインシュタイン：特殊相対性原理と光速不変の原理から因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ を導出し, 空間のみならず時間にも関与することを明らかにした. そしてこれが係数に現れるローレンツ変換を導いた.
- 1908[8, 10)]-ミンコフスキー：4次元空間 $\mathbb{R}^4$ において, ローレンツ変換は, 原点と点 (t,x,y,z) との間の距離の平方が指標 $(+---)$ の2次形式
$$s^2 = t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2) \tag{1}$$
を不変にする線形変換であることを指摘し, ミンコフスキー計量と呼ばれるようになった.

この (1) を持つ空間が, 4次元時空として $\mathbb{R}^{1,3}$ と表される**ミンコフスキー空間**であり, s が**固有時間**となる. この計量において, 一定の速度 v で運動する粒子に対しては $x^2+y^2+z^2=(vt)^2$ なので, 固有時間は
$$s = \sqrt{t^2-(vt)^2/c^2} = t\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2}$$
となり s は t よりも短縮されることが分かる. 固有時間 s が一定ならば, (1) は3次元二葉双曲面を表す.

3. ミンコフスキー空間での時間(おさらい)

固有時間 s については, 粒子の速度 v を x 方向に限って2次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,1}$ (t,x) で議論するのが分かりやすい.

光速 c が有限なミンコフスキー空間では, 等固有時間線族は双曲線族となって, 時間が定義できない領域が生じる（図1上）. そこは x 方向の 3×10^8 m に対して, 時間方向は1秒程度の時間の剥がれである（図はかなり強調してある）. 一方, c が無限大の古典力学

---

*1)　この実験が50年近くも続いていたことはあまり知られていない.

*2)　2005年のノーベル物理学賞（グラウバー, ホールと共同受賞）のヘンシュ（「光周波数コム技術を含むレーザーに基づく精密分光法の開発への貢献」に対して受賞）によって検証されたマイケルソン–モーレイの実験の結果では, 速度の差は誤差 10 m/s 以内で検出されないと報告されている. 1881年のマイケルソンの結果は 10 km/s 以内だった.

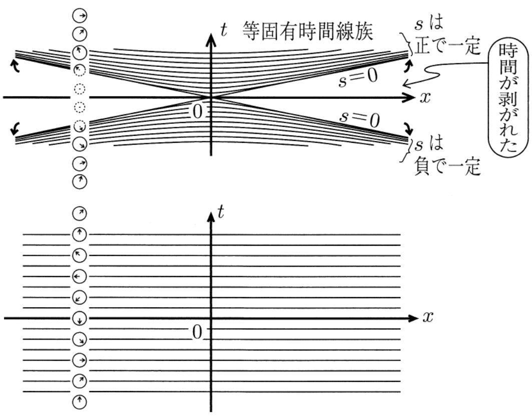


図1 （上：相対論）双曲幾何における等固有時間線族．（下：古典力学）絶対時間による等時間線族（x 軸と平行な等間隔の直線族）．

では，等時間線族は x 軸と平行な等間隔の直線族となる（図1下）．

さて，特殊相対論における時間の遅れを双曲幾何における三角不等式として，ユークリッド幾何と比較しながら確認してみよう．

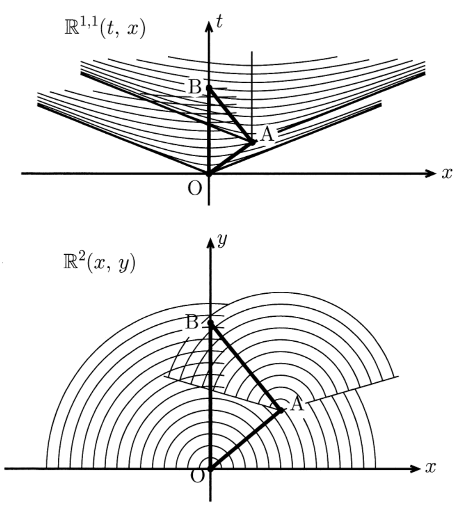


図2 （上）：双曲幾何学における三角不等式では，二辺の和は他の一辺よりも短い．（下）：ユークリッド幾何学 $\mathbb{R}^2(x, y)$ での三角不等式では，二辺の和は他の一辺よりも長い．いずれの場合も，A点で加速度（方向の変更）を体験する．

相対論（図2上）の固有時間の三角不等式では，加速度を体験して2本の世界線を乗り換えたほうが固有時間が短くなる（$s_{\mathrm{OA}} + s_{\mathrm{AB}} < s_{\mathrm{OB}}$）．ユークリッド（図2下）の距離の三角不等式では，加速度を体験して2本の道を通ったほうが距離が長くなる（$s_{\mathrm{OA}} + s_{\mathrm{AB}} > s_{\mathrm{OB}}$）[12]．これらは，相対論では時間の，ユークリッド幾何では距離の加算性としていずれも不等式となることを示している．

あらためて古典力学での時間はどうだったろうか．次の図3で示されるように，古典力学では時間の加算性として等式（$s_{\mathrm{OA}} + s_{\mathrm{AB}} = s_{\mathrm{OB}}$）が成り立つ．

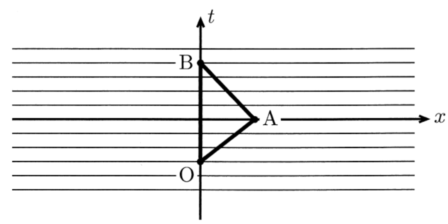


図3 古典力学での時間の三角形では，等式が成立する．

まとめると，

- 双曲幾何の相対論：二辺の和は一辺よりも短い．
- ユークリッド幾何：二辺の和は一辺よりも長い．
- 古　典　力　学：二辺の和も一辺も同じ長さ．

このように並べて比較してみると，古典力学での時間については計量幾何学的な裏付けを与えにくいという面がある．このように幾何学の観点からは古典力学での時間は特殊なものに見えてくるといえるかも知れない．

■　4. 双曲幾何学のミンコフスキー空間　■

さて，計量 (1) は，ピタゴラスの定理の類推からも簡単に導くことができる．まず原点から点 (t, x, y, z) までの固有時間 s の平方を a, b を定数として次のように仮定する：

$$s^2 = at^2 + b(x^2 + y^2 + z^2). \tag{3}$$

ここで a や b を決めるのに2つの事実を適用する．

- 事実1：原点 $(x = y = z = 0)$ で静止している人の世界線に沿っては固有時間 s は，座標時間 t と同じように刻むので $s = t$ となる．よって，$s^2 = at^2 + b^2 \cdot 0 = at^2 = t^2 \to a = 1$．
- 事実2：光の世界線は $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ を満たし，また光の世界線に沿っては固定した映像を伝播するので時間は進まない．よって，$0 = 1 \cdot t^2 +$

$$b \cdot (ct)^2 \to b = -\frac{1}{c^2}.$$

このように定数が確定して，式 (1) が得られる．

以下で，(1) とは異なる 2 次式も考えるが，比較しやすくするために $c = 1$ と簡略化しておこう．すると 1 s = 2.997924581 × 10^8 m となり，簡略化は [時間 T] と [長さ L] が同じ物理次元を持つことを意味する*3)．

よって計量 (1) は，指標 $(+---)$ の 2 次式

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (4)$$

と表される．(1) と (4) は実質同じものだが，以後これをミンコフスキー計量としよう．さて s が一定値ならば，(4) は定固有時間面としての 3 次元双曲面を表すので，双曲計量と呼ばれる．すなわちミンコフスキー空間は，双曲計量を持つ双曲幾何学の空間の 1 つである．

ところでユークリッド計量 $s^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ を持つ n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ がユークリッド空間であるが，その指標は $(\overbrace{+\cdots+}^{n})$ と表される．それ以外の様々な指標 $(\overbrace{+\cdots+}^{k}\overbrace{-\cdots\cdots-}^{n-k})$ の計量 $s^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2$ を持つ空間を擬ユークリッド空間といい，$\mathbb{R}^{k,n-k}$ と表す．$k = 1$ または $k = n-1$ ならば，指標はローレンツ指標といわれる．偶数次元 $n = 2m$ で指標が $(\overbrace{+\cdots+}^{m}\overbrace{-\cdots-}^{m})$ のときは，ニュートラル指標という．

したがって，ミンコフスキー空間は，非ユークリッド幾何学の中のローレンツ指標の双曲幾何学の空間として分類される．幾何学が物理学の舞台として切り拓かれた意味は大きい．そして相対論は一気に幾何学となり，一般相対論へと向かっていく．ミンコフスキーの登場以来，物理は幾何となり幾何は物理となったともいえるのではないか．

■ 5. 拡張ミンコフスキー空間として ■

4 次元ミンコフスキー空間の 2 次式 (4) の指標 $(+---)$ だけでなく，他の様々な次元の様々な計量の指標にも目を転じてみよう（ただし $k \leq n/2$ に限った）．

	ユークリッド	ローレンツ	一般の不定値計量
1-dim:	$(+)$（不定値計量は存在しない）		
2-dim:	$(++)$	$(+-)$	
3-dim:	$(+++)$	$(+--)$	
4-dim:	$(++++)$	$(+---)$	$(++--)$
5-dim:	$(+++++)$	$(+----)$	$(++---)$
	⋯	⋯	⋯

4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ から，次のような拡張の可能性が考えられる．

- 4 次元でもローレンツ計量から，ユークリッド計量 $(++++)$ またはニュートラル計量 $(++--)$ への拡張が考えられる*4)．いずれの場合も，1 次元的時間という意味を失う．ユークリッドでは，時間が空間と全く区別できなくなることを意味する．ニュートラルの場合は，通常の 1 次元的時間の意味を失うが，もはや時間とはいえない異質の「2 次元空間」の出現を意味しているようにも思われる．すなわち相異なる 2 種類の 2 次元空間からなる 4 次元空間である．ニュートラル計量は，最後に述べるツイスターにも深く関連する．
- 曲率を持つ時空へ：一般相対論．
- 空間の複素化：これもツイスターとの関連において述べたい．
- 高次元空間へ 1: 高次元でもローレンツ指標ならば，時間が 1 次元であることは 4 次元ミンコフスキー空間のときと全く同様の性質を持つ．
- 高次元空間へ 2: ローレンツ指標以外の一般の不定計量への拡張は，さらに予測がつきにくい．そこへの理解の入り口はやはり 4 次元ニュートラル指標かも知れない．

■ 6. 拡張ミンコフスキー，あるいはその先は… ■

拡張ミンコフスキー空間から，さらに因果律や量子重力理論，およびツイスター理論などとの関係につい

*3) 1970 年以降の光速 c の測定精度は 1 m/s 程度に達していた．この誤差は度量衡の基準の曖昧さに依存することが分かっていたので，1983 年の度量衡総会において $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s という誤差のない 9 桁の値と定められた．実際には，光速の値が定められたのではなく，長さの 1 m が，真空中で光が 1 秒間に到達する距離の 299792458 分の 1 であると定義されたのである．度量衡としてはあくまでも長さを定義したのである．

*4) ニュートラル計量 $(++--)$ の詳細については，近刊『4 次元微分幾何学への招待—不定値計量の存在，ニュートラル計量，複素曲面，ツイスター—』松下泰雄，鎌田博行，中田文憲共著，別冊数理科学 SGC ライブラリ，サイエンス社を参照されたい．

ても考えてみよう．

● **特殊相対論と因果律**：特殊相対論では，「同時刻」の相対性を明確にした．観測者によって「起きたこと」の時刻が異なることは，起きる順序を狂わさないかという疑問を引き出す．因果律の破れはないかという問題である．時間的順序のある因果的に連結している2つの出来事は，すべての観測者にとって順序の逆転は起こらず，因果律は保たれる[11]．

● **一般相対論と因果律**：一般相対論では局所的には因果律が成立する．アインシュタイン方程式の解の中には様々なトポロジーを持つ時空が存在するため，物理的世界線が閉ループとなり因果律が破れる時空モデルが存在する．

● **重力場の量子化**：量子重力理論では虚時間を考えなければならなくなる．すると時間の「前」と「後」の区別が消滅する．普通の量子力学でもミクロの世界で起きることは，マクロの世界で感じることはないというのと同じかも知れない．マクロでは「前」と「後」の区別がちゃんとつくではないか．それは巨視的な系に対する「熱力学の第2法則」が目を光らしてくれているからかも知れない．時間の「前」と「後」の区別がつかなくなりそうな境目はあるのだろうか．

● **ミンコフスキー空間からツイスターへ**[9]：数学的には，10^{-13} cm の中の点の数と 10^{-1000} cm の中の点，ましてや宇宙の大きさの中の点が同じ数だけあるということか．連続性を基礎とする数学ではなく，物理は空間そのものが量子論をも自然な姿で取り込んだ理論であるべきだとしてペンローズはツイスター理論を提唱した．それは古典力学から相対論まで貫いてきた数学的連続で稠密な数直線で抽象化された時間までもが量子化される可能性にまで及ぶ．

ペンローズのツイスター理論の考え方の基本は，幾何学が物理を記述する場を提供するのではなく，逆に物理の場から空間を構成しようとすることだった．簡単にいうと2つのスピノールの組がツイスターで，よってツイスター空間は複素4次元空間となる．そこに複素エルミート計量が定義されるがその指標がなんとニュートラル $(++--)$ となる．ペンローズは，物理の場であるスピノールを基本として構成される複素4次元空間のツイスター空間が，複素化された4次元ミンコフスキー空間と対応することを示すことからツイスター理論を展開していった．ニュートラル計量を持つ4次元空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ はこの複素4次元空間の中の実4次元部分空間として存在する．通常，特殊相対論で理解されている1次元的時間についての意識は消えてしまっているようだ．単に，意識していないというよりもツイスターでしか論じることのできない「物理」が存在するとすれば，そこでは「時間」はもはや意味を失っているのかも知れない．

参考文献

1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, **17**, (1905), 891–921.
2) A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press 初版 1922，第5版 1955（『相対論の意味』（第5版の翻訳）アインシュタイン著，矢野健太郎訳，岩波書店 1958）．
3) G.F. FitzGerald, The Ether and the Earth's Atmosphere, *Science*, Letters to the Editor: Vol.**13**, No.328, May 17, (1889), 390.
4) H.A. Lorentz, De relatieve beweging van de aarde en den aether, *Zittingsverlag Akad. v. Wet.*, **1**, (1892), 74.
5) H.A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, §§89–92, E.J. Brill, Leiden, (1895).
6) A.A. Michelson, The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science*, **22**, (1881), 120–129.
7) A.A. Michelson and E.W. Morley, On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science*, **34**, (1887), 333–345.
8) H. Minkowski, *Space and Time*, an Address deliverd at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, at Cologne, 21 September, 1908.
9) R. Penrose and M.A.H. MacCallum, Twistor Theory: An approach to the quantisation of fields and space-time, *Phys. Rep.*, **6**C, No.4, (1973), 241–316.
10) H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, *THE PRINCIPLE OF RELATIVITY: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, (Translations from *Des Relativitätsprinzip*, Teubner, 4th ed. 1922), Dover, New York 1952.
11) 佐藤文隆，「宇宙論と時間」，『時間—その科学と哲学と真理—』(pp.56–61)，別冊数理科学，サイエンス社，1981年4月．
12) 松下泰雄，「ミンコフスキー空間」，『相対論の歩み—アインシュタイン奇跡の年から百年の今—』(pp.108–115)，別冊数理科学，サイエンス社，2005年4月．

（まつした・やすお，滋賀県立大学名誉教授・大阪市立大学数学研究所）

量子力学と時間の逆行

筒井　泉

1. 古典力学の時間反転

時間を現在から過去に遡らせると，物理現象はどうなるのだろう．あたかも撮影したフィルムを逆廻しに映写したような現象は，自然界の現象として現実に起こり得るのだろうか．

それは古典力学の場合，現実の粒子の運動を時間 t に依存する位置ベクトル $\vec{x}(t)$ で表すとき，$t=0$ を基準点としてこれを時間反転した運動 $\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) := \vec{x}(-t)$ が，実際に許されるかどうかという問題である（図 1）．

例として（時間 t に依存しない）ポテンシャル $V(\vec{x})$ の下にある質量 m の粒子を考えよう．一般に時間 t の関数 $\vec{x}(t)$ が現実の運動に対応するものかどうかは，それがニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = -\nabla V(\vec{x}(t))$$

を満たすかどうかで決まる．いま $\vec{x}(t)$ がそのような現実の運動だとすると，変数変換 $t \to -t$ の下で 2 階微分は $d^2/d(-t)^2 = d^2/dt^2$ となるから，時間反転 $\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)$ もやはり同じ運動方程式を満たす：

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}^{\mathrm{R}}(t) = -\nabla V(\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)).$$

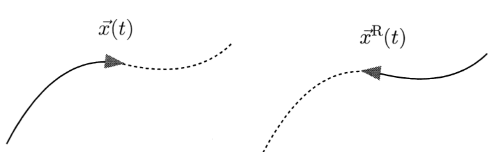


図 1　粒子の運動 $\vec{x}(t)$ と，それを時間反転した運動 $\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)$．いずれも実際の時間は矢印の向きに順方向に流れていることに注意．

従って運動 $\vec{x}(t)$ が現実のものであれば，その時間反転の運動 $\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)$ もまた現実のものとして許されることになり，その意味で，この系には時間反転対称性があると言える．

一方，電磁場中にある粒子の場合は，少し事情が複雑になる．粒子の電荷を q とするとき，電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の下での運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = q\vec{E}(\vec{x}) + q\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\times\vec{B}(\vec{x})$$

で与えられる．ここで $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は時間 t に依存しない静的な外場だとしよう．上式で時間反転 $t \to -t$ を行うと，右辺第 1 項の電場による力の項は（$\vec{x}$ が $\vec{x}^{\mathrm{R}}$ になる点以外は）変化しないが，ローレンツ力を表す第 2 項は t の 1 階微分を含んでいてその符号が反転するから，結局，時間反転運動 $\vec{x}^{\mathrm{R}}(t)$ はこの電磁場の下で許された粒子の運動にはならない．しかし外部環境も時間反転の下で変化することにすれば話は変わる．と言うのも，電場の源となる電荷の配位は時間反転では変化しないが，磁場が電流によって作られているならば時間反転によって電流の向きが逆転するから，それに伴って磁場の向きも逆転するからである．これを考慮すると，上のローレンツ力の項の符号は元に戻り，やはり時間反転対称性が保たれることになる．

さてこの事情は，量子力学ではどうなるのだろうか．

2. 量子力学の時間反転

量子力学では，物理系の量子状態は複素ベクトル ψ によって表現され，シュレーディンガー方程式に従って時間変化する．例えば最初の例の粒子の場合には，

そのシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)$$

であり，これを満たす波動関数 $\psi=\psi(\vec{x},t)$ は現実の量子状態を表す．

ただし古典力学のときとは異なり，この方程式を満たす波動関数 $\psi(\vec{x},t)$ の時間反転 $\psi(\vec{x},-t)$ は，そのままでは同じ方程式を満たさない．これはシュレーディンガー方程式は拡散型の波動方程式であって時間の 1 階微分を含むので，変数変換 $t\to -t$ の下で左辺の符号が変わってしまうためであるが，左辺に虚数単位 i があるから，ついでに両辺の複素共役を取ってやれば符号が元に戻る．すなわち，量子力学では変数変換 $t\to -t$ に加えて複素共役を取った状態 $\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t):=\psi^*(\vec{x},-t)$ は，再び元のシュレーディンガー方程式を満たす：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t).$$

と言うわけで，ポテンシャル V の下にある粒子の場合は，もし $\psi(\vec{x},t)$ が系の状態の時間発展を表すならば，$\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)$ もやはり系の状態の時間発展を表し，後者は前者の時間反転した状態とみなすことができる．実際，粒子の存在確率の密度は $|\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)|^2$ で与えられるから，時間反転状態 $\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)$ に対する複素共役の影響は確率の上からは消えて，その時間変化は古典力学の場合と同じ解釈ができる．

それではこの量子状態の複素共役には，いったいどんな意味があるのだろうか．これを考えるために，再び電磁場と相互作用する粒子を思い起こそう．電磁場の下にある電荷 q を持つ粒子のシュレーディンガー方程式は，電磁ポテンシャル $A^\mu=(\phi/c,\vec{A})$ を用いて（以下簡単のため光速 $c=1$ とする）

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

で与えられる．ここで電磁場は $\vec{E}=-\nabla\phi-\partial\vec{A}/\partial t$ および $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ で与えられるが，これらは任意関数 $\chi(\vec{x},t)$ によるゲージ変換

$$\phi\to\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t},\quad \vec{A}\to\vec{A}+\nabla\chi$$

の下で不変であり，その意味で物理的だと言われる．またシュレーディンガー方程式のゲージ不変性も，同時に波動関数に位相変換

$$\psi(\vec{x},t)\to e^{iq\chi(\vec{x},t)/\hbar}\psi(\vec{x},t)$$

を行うことによって保証される[*1]．

さて話を元に戻して，静的な電磁場の下で波動関数に対する時間反転の操作（$t\to -t$ と複素共役）を行うと，シュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\mathrm{R}}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla+i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\right)^2+q\phi\right]\psi^{\mathrm{R}}$$

となる．右辺のベクトルポテンシャルの符号が変わるから，このままでは元のシュレーディンガー方程式と異なる．しかし，古典力学の場合と同様に，時間反転の下で外部磁場が逆転することを考慮するならば，それは $\vec{A}(\vec{x})\to -\vec{A}(\vec{x})$ を意味するから，符号が元に戻って時間反転対称性を回復する．

ここで事情をもう少し一般的に見ることにして，ψ^{R} の満たす方程式を元の ψ の方程式と同じ形

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\mathrm{R}}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-i\frac{q^{\mathrm{R}}}{\hbar}\vec{A}^{\mathrm{R}}\right)^2+q^{\mathrm{R}}\phi^{\mathrm{R}}\right]\psi^{\mathrm{R}}$$

に書いておこう．つまり，時間反転状態 $\psi^{\mathrm{R}}(\vec{x},t)$ は電磁ポテンシャル $A^{\mathrm{R}},\phi^{\mathrm{R}}$ の下で運動し，電荷 q^{R} の粒子を表すものだと解釈するのである．これと先に導かれた方程式の形と見比べると，

$$q^{\mathrm{R}}\vec{A}^{\mathrm{R}}=-q\vec{A},\quad q^{\mathrm{R}}\phi^{\mathrm{R}}=q\phi$$

であるから，これを満たすには

$$q^{\mathrm{R}}=q,\quad \vec{A}^{\mathrm{R}}=-\vec{A},\quad \phi^{\mathrm{R}}=\phi$$

となっていれば良く，それが上に述べた解釈であった．ところが面白いことに，もう一つの選択

$$q^{\mathrm{R}}=-q,\quad \vec{A}^{\mathrm{R}}=\vec{A},\quad \phi^{\mathrm{R}}=-\phi$$

も可能である．これは外部磁場はそのままにして電場の向きを逆にし，かつ粒子の電荷も反転させたものに相当するから，ちょうど世界中の粒子と反粒子が入れ替わった状況に対応する．$t\to -t$ と併せれば，このとき電場 $\vec{E}$ は逆転し磁場 $\vec{B}$ は変わらない．実はこの後者の選択は，運動方程式から明らかなように，古典

*1） この論理を逆転させ，自由なシュレーディンガー方程式に波動関数の位相変換に対する対称性を要請することにより，電磁ポテンシャルの入ったシュレーディンガー方程式を導出できる．これがゲージ原理の考え方であり，素粒子間の相互作用の規定には，これが指導原理として用いられている．

力学においても許されるものであった．

ところで，量子力学では前述のように電磁ポテンシャルのゲージ変換に波動関数のゲージ（位相）変換が伴い，その位相には電荷 q が掛かっていた．従って，もし状態 ψ が電荷 q の粒子に対応したものならば，その複素共役を取った時間反転状態 ψ^{R} のゲージ（位相）変換は逆位相の変換となる．これは ψ^{R} が記述する粒子の電荷の符号が逆転 $q^{\mathrm{R}} = -q$ していることを示唆している．

ファインマンのノーベル賞記念講演[1)]に，彼の量子電磁力学の時空間的定式化とファインマン図形の創出にヒントを与えた，ホイーラーの「陽電子は電子の時間反転状態に過ぎない」という説が紹介されている．ホイーラーの大胆な着想は，全宇宙の電子と陽電子は，実のところ一個の電子が時空間の所々で時間的に反転している姿だと解釈することにより，電子と陽電子の電荷の大きさの等しさと，宇宙のすべての電子が同じ電荷と質量を持つことを説明しようとしたものであるが，上で述べた時間反転の後者の解釈は，この考えに対応するものと言えよう．

3. 時間の順行と逆行の融合

最後に，時間の順行と逆行との両方が同時に現実性を持つ，最新の奇妙な量子現象を紹介しよう[2)]．

そのため，まず光子の射出器 G と半鏡（ちょうど半々の確率で，光子を左右に振り分ける）H, K，そして鏡 A, B を用いて図 2 のような Mach–Zehnder（MZ）型の光干渉計を用意しよう．光の行路の長さをうまく調整して，上側の検出器 D に必ず光子が来るようにする（つまり 2 個目の半鏡 K を通過した左と下からの 2 つの光が，上に行くときには強め合い，右に行くときには弱め合うよう干渉させる）．このとき，鏡 A, B それぞれに異なる振動数 f_{A}, f_{B} を持つ振動装置を付けておいて，その鏡で反射した光の振動数に鏡特有の変化が起きるようにしておくと，最後の検出器 D で検出した光子の振動数分布に，反射した鏡による影響が現れる．つまり，光子の振動数分布を見れば，どの鏡に反射してきたかという「経歴」を知ることができるのである．

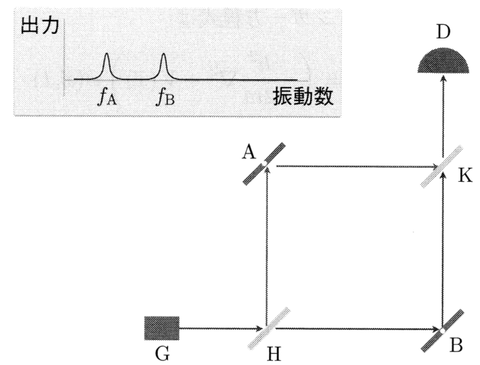


図 2　鏡 A, B に特有の振動数 f_{A}, f_{B} の振動装置をつけた MZ 型光干渉計．検出器 D に到達した光子の出力の振動数分布は，それぞれの鏡に特有な振動数を示す．

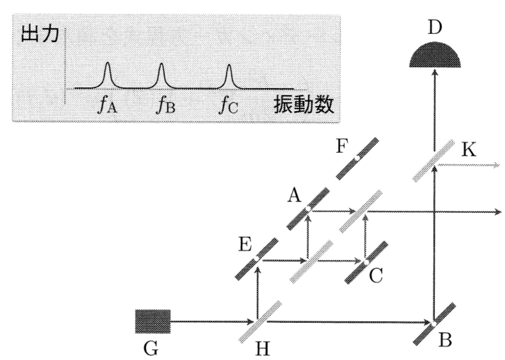


図 3　光干渉計を 2 重に組み込み，検出器 D に届くのは下側の経路の光子のみにしたもの．検出器 D に到達した振動数分布は，光子が鏡 A, B, C のみを通過したことを示す．

ここで図 3 のように上の光干渉計の上側の行路の内部に，さらに別の MZ 型干渉計を組み込んだものを作ろう．そしてその干渉計の行路を調整して，干渉の結果，内部の干渉計からは必ず右側に光子が出るように調整する．すると最初の半鏡 H で上側の行路に進んだ光子は最後の検出器 D に辿りつけなくなるから，もし検出器 D に届いた光子があるとすれば，それは下側の行路を通ってきた光子でなければならないことになる．

さてこのようにしておいて検出器 D に届いた光子の振動数分布を見ると，当然ながら，その光子は鏡 B によってのみ反射したものであるから，その振動数分布は B に特有な振動数を示し，その他の鏡の振動数は示さないはずである．ところが実際に測定してみると，図 3 のように鏡 B に加えて A と C に特有な振動数を示す．すなわち，検出器 D に届いた光子は，鏡

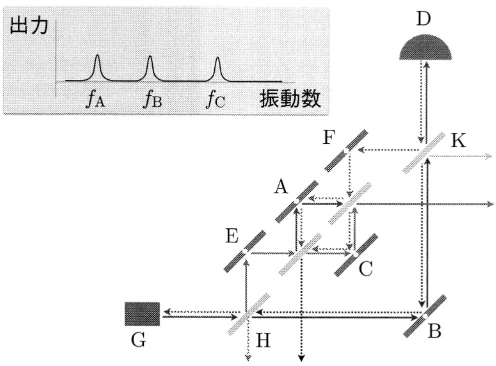


図 4 射出器 G から出た光子が時間の順行に従って取る行路（実線）と，検出器 D に来た光子が時間に逆行して取る行路（点線）．逆行する光子は，内部の干渉計から必ず下側に出る．

B に加えて鏡 A と C にも反射して来たことが窺えるのである．これはいったいどういうことだろう？

よく考えてみると，実際に刻々と光子の位置を確認したわけではないから，検出器 D に届いた光子が下側の行路を通ってきたものだとするのは，射出器 G から出た光子を時間を順行して追跡することによって得た推論に過ぎない．しかし反対に，検出器 D に届いた光子を時間を逆行して追跡するとどうなるのだろうか．つまり，検出器 D が光の射出器だとして，時間を遡って干渉計の中の行路を逆向きに調べてみるのである．

その結果を時間の順行の行路と重ねて示したのが図 4 である．これを見ると，時間を順行する光子と逆行する光子の両方がともに経由する鏡は A, B, C の 3 つのみであり，実験で振動数分布の上に現れたものと一致する．従って，射出器 G から出て検出器 D に到達する光子は，その中間時刻で時間を順行するものと逆行するものの両者が交錯するところにのみ物理的な実在があり，それが実験の結果として現れているのだと解釈できそうである．

はたしてこの解釈が正しいかどうかは，光子の位置を刻一刻と測れれば検証できるだろうが，通常の（射影測定と呼ばれる）「強い」測定の方法では，いったん測定を行うとその時点で光子は消滅するか，さもなければ測定による擾乱で大きく状態が変化してしまい，その後の光子の位置がわからなくなってしまう．それでは光子の位置を「弱く」測定できるとしたら，どうなるのだろうか．

実際，そのような測定の方法が 1988 年に Aharonov らによって提案されており[3)]，粒子の状態を極めて微弱にしか擾乱せずに測定し，その結果生じる大きな誤差は測定回数（統計量）を増やして精度を補い，その平均値として物理量の値を推定する．この測定方法は「弱測定」と呼ばれ，このようにして得た物理量の値を「弱値」と呼ぶ．この「弱測定」を用いて光子の行路を辿ると，たしかに鏡 A, B, C の 3 つを経由する粒子の存在に対応する「弱値」のみが有限に存在し，鏡 E, F に対応する「弱値」はゼロとなることが示される．つまり，光子の状態を変えないような弱い測定で得られる存在証拠から，上の解釈が成立することが裏付けられるのである．

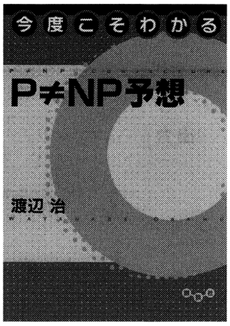
ここで採り上げた事例は，量子現象を眺めるにあたり，時間の順行と逆行のどちらにも偏らない融合的な見方が有効な場合があることを示しており，量子力学における因果と実在の意味を考える上で，新たな視点を示唆しているように思われる．

参考文献

1) R.P. ファインマン著『物理法則はいかにして発見されたか』（江沢洋訳，ダイヤモンド社，1968 年）245 頁.
2) A. Danan *et al.*, “Asking Photons Where They Have Been”, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 240402.
3) Y. Aharonov *et al.*, “A time-symmetric formulation of quantum mechanics”, *Physics Today* **63**, November 2010, pp.27–32.

（つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所）

今度こそわかるP≠NP予想



渡辺治著，A5判，185頁，本体2800円，講談社

「P≠NP予想」は，理論計算機科学における重要な未解決問題の一つである．特に，「計算複雑さの理論」や「計算量理論」と呼ばれる分野の中心課題である．コンピュータを使って問題解決する際，「処理手順」=「アルゴリズム」を明確にする必要がある．同じ問題を解決するのにも，アルゴリズムの良し悪しで処理時間や使用メモリ量などは変わってくる．そのため，データサイズが大きい場合や使用できる時間やメモリ量の制約が強い場合には，性能の良いアルゴリズムを考える必要がある．では，工夫さえすれば，いくらでも性能を向上させることができるのであろうか．当然，問題ごとにこれ以上性能を上げることができない限界が存在する．本書の言葉を借りると「そうした計算の限界を解析する分野が計算複雑さの理論」である．

処理対象のデータサイズを変化させたとき同サイズの中の最悪実行時間がどのように変化するか，つまり，最悪実行時間が入力サイズのどのような関数で表されるか，がアルゴリズムの速度指標として良く用いられる．P は最悪実行時間を表す関数が多項式（polynomial）であるようなアルゴリズムが存在する（答えがYes/Noである）問題の集合である．NP は，非決定性（nondeterministic）の計算モデルで多項式時間で実行できるアルゴリズムが存在する問題の集合である．NP は，答えが正しいかどうかを多項式時間で検証可能な問題の集合としても特徴付けられる．ここでいう検証可能とは，正解がYesの場合は，入力に加えて適切な補助情報を与えられるとYesと出力し，正解がNoの場合は，どのような補助情報を与えられてもNoと出力するアルゴリズムが存在することである．NPに属する問題の正解がYesの場合に，適切な補助情報を多項式時間で見つけられるのであれば，その問題はPにも属することになる．「P≠NP」なら，NPには属するがPには属さない問題は，ヒントや証拠や証明を与えられると検証は容易だが，それらを「発見」したり「気づく」ことが難しい問題と言える．

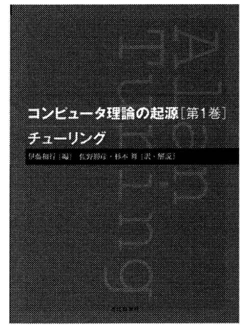
数学の未解決問題を集めたミレニアム懸賞問題に含まれていることから「P≠NP予想」を知った人もいるだろう．また，実際に計算やデータ処理する必要から，アルゴリズムの設計と解析や計算複雑さの理論に出会い，この問題を知った人もいるかもしれない．本書は，このような理論計算機科学を専門としない読者に「P≠NP予想」を含めた計算複雑さの理論の基本概念を理解してもらうことを意図している．そのため，本書では，厳密性を担保しつつ初学者が理解しやすくなるよう努力がなされている．例えば，直感的な理解を助けるために「実感しよう」や煩雑な議論を本文から分離するために「ちょっと細かいですが……こだわり」というコラムが設けられている．他にも，多くの計算複雑さの理論のテキストと異なり，本書で用いる計算モデルなどを除いて，計算可能性や形式言語理論といった周辺分野には触れない．扱う問題例も，主にビット列，自然数，グラフ，命題論理式に限っている．また，主に使われる計算モデルもレジスタマシンの亜種である．ただし，実行時間の評価を厳密に行うために，メモリ1ビットごとにアドレスが振られ，メモリとレジスタの間で1命令で転送できるのは1ビットなどの制約を設けている．このような制約は厳密性担保のために必要なことであるが，初学者には不自然に感じられるかもしれない．しかし，評者が知る範囲では，初学者向けに最も成功しているモデルである．

第1章で「P≠NP予想」について概観し，第2章で計算モデルを導入すると，すぐに計算複雑さ理論の紹介が始まる．第3章で計算量クラスが導入され，続く第4章〜第6章では，対角線論法，還元，模倣といった3つの基本的な技法・概念とそれらを用いて導かれる性質が解説される．最後の第7章では，「計算複雑さの理論」研究の最前線が紹介されている．また，各章の中でランダムネスを用いた計算や脱乱拓化にもページが割かれている．

計算複雑さの理論は，計算の限界を示し，高速なアルゴリズム設計の手法を提供する．そしてなにより「P≠NP予想」には惹かれる何かがある．本書は計算複雑さのエッセンスに触れるのに現時点では最適な一冊と言える．

谷　聖　一（日本大学文理学部）

コンピュータ理論の起源 第1巻 チューリング



伊藤和行編，佐野勝彦・杉本舞共訳・解説，A5 判，256 頁，本体 4200 円，近代科学社

本書は「コンピュータ理論の起源」を当時の原典に探る試みとして，まずチューリングの業績を取り上げ，紹介・解説した本であるが，大変な努力を払った調査・研究でまとめられた，労作である．私が初めてチューリングの「計算可能な数」の論文を読んで大いに感動したときには，図書室から元の雑誌を借りて閲覧するしかなかったが，今はインターネットで雑誌から講演の草稿まで全文ダウンロードできる時代で，便利になったものだと思う．しかしその典拠を探すのは，手掛かりがないとむずかしいが，本書には原資料・参考資料等の所在が詳しく記載されているので，とても助かる．

本書の構成は，以下のとおりである．

序章　チューリングの人生と業績（1～13 ページ）
第 I 部　「計算可能な数について，その決定問題への応用」（16～85 ページ）
第 II 部　「1947 年 2 月 20 日におけるロンドン数学会での講演」（大型電子計算機 ACE の解説，88～117 ページ）
第 III 部　「知能機械」（121～163 ページ）
第 IV 部　「計算機械と知能」（166～218 ページ）

各部とも①「標題の論文あるいは講演の全訳」（ていねいな補注つき）と②その「解説」の，2 章ずつに分かれている．また第 IV 部のあとに，21 ページに及ぶ詳細な参考文献と索引がつけられている．

第 I 部で取り上げている論文は，私も個人的な思い入れが深い超・有名な論文であるが，あちこちで不正確な紹介がされている．その一つは「応用」として「とりわけヒルベルト流の決定問題が解を持ちえないことが示される」（本書では 17 ページ，解説 61 ページ）というところで，原文は

> “In particular, Hilbertian Entsceidungsproblem can have no solution.”

であるからこれは誤訳ではないが，情報処理の分野で「決定問題」というと「与えられた自然数が素数か否かの判定」とか「ハミルトン閉路の存在判定」，「ヒルベルトの第 10 問題」を連想する人が多いので，「ヒルベルト流の決定問題」を「ヒルベルトの第 10 問題」に置き換えている資料まであった（これはマチャセヴィッチの 1960 年の仕事）．ここは後の解説のように「一階述語論理式の証明可能性を一般的に判定することはできない」，あるいは「ヒルベルトのいう決定問題の中には，解けないものがありうる」（ことが示された）と訳しておけば，そういう誤解は避けられるかな，と思う．なお「判定法」が「存在する」ことを示すには，その方法を具体的に説明すればよいが，「存在しない」ことを示すには（実効的）「判定法」の一般的な定義が必要で，チューリングの仕事もチャーチの提唱も，そこ（つまり決定問題の根幹）にかかわっている．

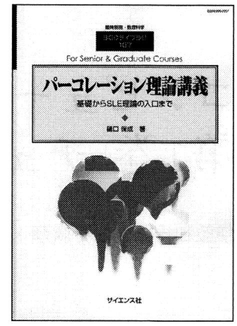
ついでながら解けない問題の例としてはいわゆる「停止問題」が有名で，その出典として現行のほとんどの教科書でチューリングのこの論文が挙げられているが，この論文には停止問題は出てこない（停止問題を定式化したのは M. デーヴィスである）．

なお原論文ではチューリング機械や万能チューリング機械の設計法が今とはずいぶん違っていて，必要以上に複雑であるが，本書では解説のお蔭でかなり近づきやすくなっているのではないか，と思う．

「計算機械と知能」もおもしろい論文であるが，哲学者たちから強い反発があった．「中国語がまったくわからない人が，与えられた規則群に従って動くだけで，中国語の対話（文書の交換）を行ったとしても，その人が中国語を理解しているとは言えない」（理解抜きの機械的な行動に，知能があるとは言えない）というサールの反論が有名だけれど，その頃「自動翻訳」で苦労していた私などは「そんなことが，ほんとうにできると思うの？」という印象が強く，この場合「ハードウエア（人）ではなく，ソフトウエア（規則）を含むコンピュータ・システム全体には，知性を認めてよい」というチューリングの立場に共感していた．今となっては懐かしい思い出である．

野崎　昭弘

パーコレーション理論講義
基礎からSLE理論の入口まで



樋口保成著，B5 判，144 頁，本体 2194 円，サイエンス社

本書の著者による「ちょっと変わった確率論入門」という「ちょっと変わった」サブタイトルのついた，パーコレーションに関する最初の記念すべき入門書『パーコレーション』が出版されたのが 1992 年である．そのほぼ 20 年後の 2011 年 6 月に出版された「新版」では，今世紀に入ってからの新しい話題の紹介のため「2 次元パーコレーションの臨界現象」の章が加えられた．本書の「まえがき」を読むと，執筆を開始されたのが 2011 年秋頃なので，時期的にも内容的にも，本書は「新版」に続くものとなっている．

さて，本書は，大きく「第 1 章 パーコレーション：基礎編」と「第 2 章 応用編」とに分かれている．

細かくみると，第 1 章の「1.1 パーコレーションとは」では，パーコレーション問題を直感的に説明した後，数学的な設定を述べている．「1.2 パーコレーションの相転移と基本的な道具」では，ネットワークのつながり方に関する様々な事象の確率を評価するのに極めて重要な役割を果たす Harris-FKG 不等式と BK-Reimer 不等式を紹介している．無限に広がった格子の上に無限クラスターが出現する確率はパラメーター p を大きくするとある特定の値 $p = p_c$ を境に 0 から 1 にジャンプすることが知られている．ここで，p_c を臨界確率という．「1.3 Sharp threshold theorem」では，有限領域での様子から相転移の情報を引き出すための重要な定理が述べられている．有限領域を大きなクラスターが横断する確率は，パラメーター p に対してなめらかな関数ではあるが，その p に関する微分を確率論的な意味を持つ量で表示するのが Russo の公式であり，この関数が $p = p_c$ 付近においてある意味で急速な変化を遂げることを保証するのに用いられるのが sharp threshold theorem である．「1.4 横断確率と RSW 定理」では，2 次元正方格子上のボンドパーコレーション問題で有限領域をクラスターが横断する確率を評価する方法を紹介し，$p_c = 1/2$ であるという有名な Kesten の結果を導いている．「1.5 高次元パーコレーションについて」および「1.6 無限開クラスターの一意性」では，高次元でも適用可能である重要な議論の幾つかが紹介されている．

第 2 章の「2.1 グラフ上のパーコレーション」では，一般の無限グラフにおけるパーコレーション問題が取り扱われている．2 分木のように，有限領域の境界がその領域自身と同じオーダーの大きさを持つグラフは non-amenable と呼ばれ，d 次元超立方格子ではみられなかった特異な現象が起こることが示される．一方，臨界点において無限クラスターが存在するかどうかは，例えば 3 次元立方格子では現在も未解決であるが，ある種の non-amenable なグラフに対しては mass-transport principle という技術により解決されていることが紹介されている．「2.2 2次元の臨界点の近傍でのパーコレーション」では，Kesten によって 1980 年代後半になされた，臨界指数の関係式の導出の理論が丁寧に解説されている．「2.3 SLEの理論へ」では，三角格子上のサイトパーコレーション問題の臨界点において，格子間隔を 0 に近づけたときの横断確率の極限が等角写像で不変であるという，2010 年に Smirnov がフィールズ賞を受賞する理由の一つとなった結果を紹介し，関連して現れるランダムな曲線を記述する SLE（Schramm-Loewner evolution）の理論の入口まで案内している．

このように，本書はまさに時宜を得た，そして幾つかの今後の研究テーマへも続くよう細やかに配慮された，パーコレーションの「ちょっと高度な」入門書であり，多くの方に読んで頂きたい．

実は書評を依頼されたときに頭に浮かんだのが『ソラリス』等で有名な SF 作家スタニスワフ・レムの実在しない本の書評集『完全な真空』であった．なぜなら，最初の入門書が出版された 1992 年の時点で，レムに成り代わり，架空の書としての本書の書評をどの程度書き得たか，ということを考えたからである．特に，Schramm によって 2000 年頃に導入された SLE は，全く触れることが出来なかったであろう．

今野 紀雄（横浜国立大学大学院工学研究院）

例題形式で探求する代数学のエッセンス

方程式から代数学の本質に迫る

第1回

方程式の複素数解

小 林　正 典

はじめに

方程式は古代から用いられてきた問題解決の手法であり，代数学の源流の 1 つである．まず人類は数を 1, 2, 3 などの数字を用いて表すようになり，記数法が生まれた．そして，未知数を用いて満たすべき条件を書き表し，記号操作等で解を求め始め，方程式が現れた．

以下では方程式は特に断らない限り**代数方程式**，すなわち未知数の多項式（＝整式）で表された方程式とする．方程式の解の全体は単なる集合ではなく，代数多様体と呼ばれる図形になる．方程式の可解性はガロア（Galois）理論により解の対称性の言葉で述べられる．逆に，図形の幾何的性質は式の代数的性質と対応させて調べることができる．

代数学では計算的側面も重要である．連立 1 次方程式の簡約化として，掃き出し法（消去法）は基本中の基本である．高次の連立方程式の簡約化にはグレブナ（Gröbner）基底の理論がある．

この連載では，方程式に関連する易しい例題を通じて，代数学の様々な要点を取り上げていく．講義のように系統立てて「線形代数」,「群論」,「環論」,「体論」と順を追って述べることはしない．具体的な問題を解くときには，様々な代数構造が混ざって出てくる．生きた題材をまるごと扱うことで，代数学のエッセンスに触れながら，同時に問題を解く力も養えればと思う．

1.1 方程式を「解く」とは

最初の例題は，やはり方程式を解くことから始めよう．

例題 1.1　方程式 $x^7 = 1$ を複素数の範囲で解け.

解は 1 の 7 乗根 $\sqrt[7]{1}$ である．おしまい.

…いや，ちょっと待ってほしい．確かに，方程式を解け，というとき，係数から加減乗除と根号のみを用いて解を表せ，という意味であることが多い．しかし今の場合，これでは同語反復である．解のことがよくわかるようになったとは到底思えない.

求められていることは，7 乗して 1 になるという「条件」を満たす複素数を，具体的・構成的に「表示する」ことであろう．その表示の道具として，伝統的な「解の公式」で用いられているのが，加減乗除と根号のみなのである[注1]．古代ギリシャ以来のお約束として，もし根号が平方根のみで済めば，解を平面上に定規とコンパスのみで作図して幾何的に表すこともできる，というわけである.

注1　解を表示する方法としては，ニュートン（Newton）法を用いて近似計算し小数表示する方法などいろいろあるが，ここでは代数的なものに限定する.

そもそも，$x^7 = 1$ の解には明らかな解と，そうでない解がある．$x = 1$ は明らかに解である．代入すれば確かめられる．その他の解を 1 と区別して求めたいとしたらどうであろうか.

1.2 除法の原理

他の解について調べたいとき，まず使うのは高校で習う因数定理である．その証明に用いられる「除法の原理」を今後度々使うので，復習しておこう.

まず整数の場合を考える．a, b を整数とし，$b \neq 0$ のとき，a を b で割って，

$$a = qb + r$$

となる整数 q と，$|b|$ より小さい非負整数 r が一意的に存在する．これを**除法の原理**という．q は**商**，r は**余り**・**剰余**と呼ばれる.

同様のことが 1 変数多項式でも成り立つ．以下，多項式の係数はある体 K に含まれるとする．体はとりあえず，有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ や実数の全体 $\boldsymbol{R}$ のように，加減乗除が自由にできる集合である．ただし，加法の単位元 0 による割り算は除外する．また，乗法の単位元 1 は 0 と異なるとする.

定理 1.1（除法の原理）　$f(x), g(x)$ を K 係数多項式とし，$g(x) \neq 0$ のとき，

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

となる K 係数多項式 $q(x)$ と $g(x)$ より低次の K 係数多項式 $r(x)$ が一意的に存在する.

証明　$f(x), g(x)$ の最高次の項をそれぞれ ax^m, bx^n $(b \neq 0)$ とする.

まず存在を m に関する帰納法で示す．$m < n$ のとき，$q(x) = 0, r(x) = f(x)$ とすれば条件を満たす．$m \geq n$ のとき，$f(x) - \frac{a}{b}x^{m-n}g(x)$ は $f(x)$ より低次であるから帰納法の仮定より上の形に書ける．よって $f(x)$ もそうである.

次に一意性を示す．まず $f(x) = 0$ のときを考えよう．もし $q(x) \neq 0$ ならば，$q(x)g(x)$ は 0 でない n 次以上の多項式になるので $q(x)g(x) + r(x) \neq 0$.

よって $q(x) = 0$ であり，従って $r(x) = 0$ である．$f(x)$ が一般のとき，$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$ と表せたとすると，$0 = (q_2(x) - q_1(x))g(x) + (r_2(x) - r_1(x))$ より $q_1(x) = q_2(x), r_1(x) = r_2(x)$ である． □

注意 1.1 証明をよく見ると，係数が体とは限らない可換環の場合でも，$g(x)$ がモニック（最高次の係数 b が 1）であれば，同様に除法ができる．

$f(x) = q(x)g(x)$ となるとき，$g(x)$ は $f(x)$ を**割り切る**といい，記号で $g(x)|f(x)$ と表す．$f(x)$ は $g(x)$ の**倍元**，$g(x)$ は $f(x)$ の**約元**であるという．

$\alpha \in k$ に対し，$g(x) = x - \alpha$ とすると，余りは定数であるから，$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r$ と書ける．x に α を代入して次を得る．

系 1.1（剰余定理） 多項式 $f(x)$ を $x - \alpha$ で割った余りは $f(\alpha)$ に等しい．

系 1.2（因数定理） $(x - \alpha)|f(x) \iff f(\alpha) = 0.$

従って，α が代数方程式 $f(x) = 0$ の解（$f(x)$ の**根**ともいう）であることは，$f(x)$ が 1 次式 $x - \alpha$ で割り切れるという整除関係で判定できる．そこで，非負整数 m に対し，$f(x)$ が $(x - \alpha)^m$ で割り切れ $(x - \alpha)^{m+1}$ で割り切れないとき，α は $f(x)$ の m **重根**であるという．

注意 1.2 根であることを式の整除関係に移し替えることは，幾何と代数を結ぶポイントの 1 つである．

このことは多項式に限らない．正則関数[注2]においても，正則関数 $f(x)$ が複素数 α を根とすることは，$f(x) = (x - \alpha)g(x)$ となる正則関数 $g(x)$ が存在することと同値である．重根も同様である．$f(x)$ を $x = \alpha$ のまわりでテイラー（Taylor）展開したとき $(x - \alpha)^m$ の項から始まることが m 重根となることと同値であることも示される．詳しくは複素関数論のテキストを参照されたい．

注 2 複素平面内の領域で定義された，複素微分可能な複素数値関数．

1.3 複素数

x が実数のとき $x^7 - 1$ は増加関数なので，$x = 1$ 以外に実根はない．そこで数の体系を複素数まで拡張して根を探そう，となるわけである．

複素数体は**代数閉体**である，すなわち次を満たすので重宝する．

定理 1.2（代数学の基本定理） 複素数係数の代数方程式は，複素数の範囲に必ず解をもつ．

特に，実数係数の代数方程式なら，複素数まで数を広げておけば，解は必ず見つかる．因数定理を逐次用いることで，$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$ と複素 1 次式の積に因数分解できるというわけである．これについては文献 1) の清水氏の記事等を参照していただくことにして，まずは複素数について復習しておこう．

2 乗して -1 となる数 $i = \sqrt{-1}$ を考えて，実数 a, b に対し $a + ib$ で表さ

れる数を**複素数**という．複素数の全体を $\boldsymbol{C}$ で表す．

1.3.1 実数の組としての複素数

ハミルトン（Hamilton）による代数的な定式化に従えば，$\boldsymbol{C}$ は $1, i$ を基底とする実数体上 2 次元のベクトル空間であり，自然な積を $i^2 = -1$ で入れたものである．以下で成分で具体的に書いて説明しよう．

まず，複素数 $a+ib$ は実数の組 (a,b) のことである．よって $a+ib$ と $c+id$ が等しいとは $a=c$ かつ $b=d$ のことである．a を**実部**，b を**虚部**という．

2 つの複素数に対して和と積

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d), \quad (a+ib)(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc)$$

が定まる．すると $\boldsymbol{C}$ は体になることが確かめられる．積は実数のスカラー倍の拡張になっている（$d=0$ のとき $(a+ib)c = ac+i(bc)$ である）．

$a+ib$ の**複素共役**を $\overline{a+ib} := a-ib$ で定める．

問題 1.1　実多項式 $f(x)$ に対し，$f(i) = ia+b$ であることは，$f(x)$ を x^2+1 で割った余りが $ax+b$ であることと同値であることを示せ．

解答　除法の原理より $f(x) = q(x)(x^2+1)+ax+b$（$q(x)$ は実多項式，a, b は実数）とおける．$x=i$ を代入すると $f(i) = ia+b$ を得る．複素数 $f(i)$ から実部 a，虚部 b は一意的に定まるから，逆も言える．　□

上の問題から直ちに次が従う[注3]：

実多項式 $f(x)$ に対し，$f(i)=0 \iff (x^2+1)|f(x)$.

注 3　$f(i)=0$ の両辺の共役複素数を取ると $f(-i)=0$ となることからも示せる．

1.3.2 平面の点としての複素数

ガウス（Gauss）・ウェッセル（Wessel）・アルガン（Argand）により，複素数を平面幾何の対象とする方法が発見された．複素数 $\alpha = a+ib$（a, b は実数）を平面の点 (a,b) と同一視するのである．

原点からの距離 $\sqrt{a^2+b^2}$ を**絶対値**と呼び $|\alpha|$ で表す．$\alpha \neq 0$ のとき実軸から反時計回りに測った角度 $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ を**偏角**と呼び $\arg\alpha$ で表す．偏角は 2π の整数倍の差を除いて定まる．$r = |\alpha|$, $\theta = \arg\alpha$ とおくと，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ と表せる．

問題 1.2　複素数 α, β をそれぞれ 2 次元実ベクトルとみたとき，

$$\bar{\alpha}\beta = \alpha\cdot\beta + i(\alpha\times\beta)$$

が成り立つことを示せ．但し，$(a,b)\times(c,d) := ad-bc$ とする．

解答　$(a-ib)(c+id) = (ac+bd)+i(ad-bc)$.　□

上の問題で $\beta=\alpha$ とすると，$\bar{\alpha}\alpha = \alpha\cdot\alpha = |\alpha|^2$ が従う．

複素数の演算は平面の相似変換を表す．まず，加法はベクトルとしての和であるが，α を加える変換は，平行移動 $(x,y)\mapsto(x+a, y+b)$ である．次に，複素数 $re^{i\theta}$ の掛け算は，三角関数の加法定理により $(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$ となる．絶対値を r 倍し，偏角を θ だけ加えているから，複素数の掛け算は，

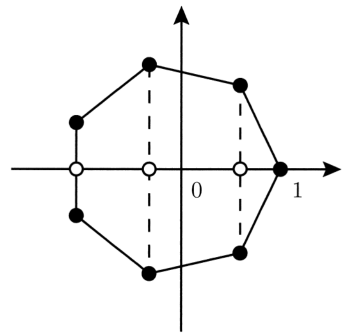


図 1.1　複素平面における $x^7 = 1$ の解（黒丸）．白丸は $\frac{t}{2} = \cos\frac{2k\pi}{7}$ $(k = 1, 2, 4)$．

原点を中心とする拡大（縮小）と回転とを合成したものになる．最後に，複素共役は実軸に関する鏡映である．

逆に，平面の相似変換は以上 3 つの演算を合成して表せる（平面内で，三角形 ABC をそれと相似な三角形 A′B′C′ に移す方法を考えてみるとよい）．向きを保つならば複素共役は不要であり，向きを保つ相似変換は定数項を許した 1 次式（**アフィン変換**）で表される．

偏角の加法性から次が従う．

定理 1.3（**ド・モアブル（de Moivre）の公式**）　整数 n に対して，次が成り立つ：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

この公式は $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ とも書ける．

よって $x^7 = 1$ の解は，$\zeta = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ とおくと $x = \zeta^k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$ $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ である．これらは平面上で正 7 角形の頂点をなす（図 1.1）．

これで解が表示されたように見えるかもしれない．確かに三角関数で表せたことで，幾何的には分かりやすいし，解析的な近似計算もできるであろう．もし $x^3 = 1$ の解なら，$x = 1,\ \omega := \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} (= \bar{\omega})$ となり[注4]，分かったと言えるだろう．しかし，$\cos\frac{2\pi}{7}$ について我々は良く知っているだろうか？ もう少し代数で頑張ってみよう．

注 4　ω, ω^2 は 3 乗して初めて 1 になるので，1 の原始 3 乗根と呼ばれる．

1.4 解の公式

2 次方程式の解の公式は古代バビロニアから知られていた．$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ において，左辺を

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と平方完成することで，解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を導出できる．$b^2-4ac<0$ のときは後に複素数として意味づけされた．

一般に，多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

に対し，

$$y=x+\frac{a_1}{na_0}$$

とおくと注5，y^{n-1} の項は現れず

$$f(x)=a_0y^n+(y\ について\ n-2\ 次以下)$$

となる．このようにして最高次より 1 次低い項を消す操作を，導入したカルダノ（Cardano）に因んで**カルダノ変換**という．

注5　na_0 での割り算が一般に許されない環（や正標数の体）では使えない．

最高次の係数は 0 でないから，割っておくことでモニックであるとしてよい．カルダノは，一般の 3 次方程式をタルタリア（Tartaglia）がすでに解いていた

$$x^3+ax+b=0$$

に帰着して 3 次方程式の解の公式を得たのである．具体的に，例題 1.1 を解くことで見てみよう．

1.5 例題 1.1 の解答

$x=1$ は解であるから因数定理より x^7-1 は $x-1$ で割り切れる．

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

となるから，$x=1$ 以外の解は

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

を解けばよい．この方程式は，降べきの順に並べたときに係数が左右対称になる**相反方程式**であり，常套手段がある．$x=0$ は解ではないから，両辺を x^3 で割って，

$$x^3+x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}=0$$

と同値である．$t=x+x^{-1}$ とおくと，$(t^3-3t)+(t^2-2)+t+1=0$ より整理して

$$t^3+t^2-2t-1=0$$

を得る．カルダノ変換 $s=t+\frac{1}{3}$ を施すと $(s-\frac{1}{3})^3+(s-\frac{1}{3})^2-2(s-\frac{1}{3})-1=0$ となり，整理すると

$$s^3-\frac{7}{3}s-\frac{7}{27}=0$$

となる．ここからはタルタリアの方法に従う．

$s=u+v$ とおく．$s^3=(u^3+v^3)+3uv(u+v)$ であるから，

$$\left(u^3+v^3-\frac{7}{27}\right)+(u+v)\left(3uv-\frac{7}{3}\right)=0$$

となる．この十分条件として，

$$u^3+v^3=\frac{7}{27},\quad uv=\frac{7}{9}$$

を解く．解と係数の関係より u^3, v^3 は 2 次方程式

$$y^2-\frac{7}{27}y+\left(\frac{7}{9}\right)^3=0$$

の 2 解である．これを解くと

$$y=\frac{7}{54}(1\pm i(3\sqrt{3}))$$

を得る．これから，

$$t=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+i(3\sqrt{3}))}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-i(3\sqrt{3}))}\right)$$

となる．2 つある立方根 u, v の取り方はそれぞれ 3 通りずつある．1 つ取ると他の 2 つはその ω 倍，ω^2 倍である（ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つ）．積 uv が $\frac{7}{9}$（これは正の実数である）になるように偏角を選ぶ．すると，立方根の中身は共役な虚数であるから，u と v も共役複素数になる[注6]．これより t として 3 つの異なる実数解を得る（そのうち最大のものが $2\cos\frac{2\pi}{7}$ である）．

注6　3 次方程式が実数係数であり，かつ，y に関する判別式が負であるときはこうなる．

$x^2-tx+1=0$ であるからついに解を得た：

$$x=\frac{t}{2}\pm i\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\qquad (t \text{ は上の式で与えられた 3 つの実数}).$$ □

注意 1.3　以上で，$x=1$ 以外の 6 個の解を，3 組の共役複素数として求めた．

複素 7 乗根を表すのに複素 3 乗根を用いていて，本質的に易しく表したと胸を張って言えるかどうかは微妙であるが，複素数の 3 乗根は実 3 乗根・角の 3 等分を組み合わせて得られ，折り紙を用いた作図法が知られている（文献 2) の梶原氏の記事とその引用文献を参照)．

もし立方根を使わず平方根だけで済むなら，正 7 角形が古典的な意味で定規とコンパスで作図可能であることになるのだが，残念ながらそうはならない．これはガロア理論の教えるところであり，まだ準備が必要である．

注意 1.4　3 次方程式の解の公式を利用して，カルダノの弟子のフェラーリ (Ferrari) は 4 次方程式の解の公式を得た（文献 1) 等を参照)．16 世紀にここまで進んだが，5 次方程式の解の公式はいつまでたっても見つからなかった．19 世紀になって，5 次（以上）の場合は解の公式が存在しないことがルフィニ (Ruffini) とアーベル（Abel）により示されたのであった．

1.6 補足

1.6.1 連立 1 次方程式を解くということ

方程式を解くことの意味を，連立 1 次方程式の場合に考えてみよう．

n 変数で m 本の方程式からなる連立 1 次方程式は，$m\times n$ 行列 A，n 次元の未知数ベクトル $\boldsymbol{x}$，m 次元の定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表すことができる．アフィン写像（この場合線形写像でもある）$f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m,\ \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ を考えると，解の全体はアフィン部分空間 $f^{-1}(\boldsymbol{b})$ となる．

$\boldsymbol{x}_0$ を特殊解とし，同伴な同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解（解空間の基底）を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ $(k = n - \operatorname{rank} A)$ とする．基本解を横に並べた行列を $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ とするとき，解の全体はやはり（単射）アフィン写像 $g: \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{t} \mapsto X\boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}_0$ の像としてパラメータ表示される．

写像の逆像として陰に（内包的に）与えられた集合 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ を，写像の像として陽に（外延的に）与えられた集合 $\{\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}_0 \mid \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}^k\}$ の形に書き直しているのである．

1.6.2 倍角公式

相反方程式を解くときに $x^n + x^{-n}$ を $x + x^{-1}$ のモニックな整数係数 n 次式として表した（一般の n に対し，そう表せることを示せ）．$x = e^{i\theta}$ のときを考えると，$x + x^{-1} = 2\cos\theta$ であり，$x^n + x^{-n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos n\theta$ となるから，n 倍角の公式が与えられる．$\cos n\theta$ は整数係数 n 次多項式 $T_n(x)$ を用いて $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ と表せる．$T_n(x)$ は**チェビシェフ**（Chebyshev）**多項式**と呼ばれる．$T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$ である．

1.6.3 代数的数

今回の例題 1.1 において，解 x の実部は $\cos\frac{2k\pi}{7} = \frac{t}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ である．

$$8\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t}{2}\right) - 1 = 0$$

であるから，$\cos\frac{2k\pi}{7}$ は整数係数多項式の根，すなわち**代数的数**である．$t = 2\cos\frac{2k\pi}{7}$ のほうはモニックな整数係数多項式の根となるので，**代数的整数**であるという．もちろん，整数のうち代数的なものという意味ではない．1 次式の場合に考えてみよう．有理数であることと，ある整数係数 1 次式 $px - q$ $(p \neq 0)$ の根であることは同値である．$\frac{q}{p}$ が整数であることと，$p = 1$ とできることは同値である．代数的数については次回さらに詳しく考えてみることにしよう．

1.6.4 文献

参考となるテキストや文献は厖大にあるので，一般向けの方程式の特集記事を 2 つ挙げておき，その記事の参考文献を見ていただくことにしたい．

参考文献

1)　特集「方程式と現代代数学」,「数理科学」2011 年 3 月号，サイエンス社．
2)　特集「代数方程式とガロア理論」,「数学セミナー」2006 年 1 月号，日本評論社．

（こばやし・まさのり，首都大学東京大学院理工学研究科）

微分方程式を考える

第5回 数学は現象をいかに記述しているか

常微分方程式の初期値問題の大域解

小 澤　徹

常微分方程式の初期値問題の時間大域解の存在について，主として局所解の延長という立場から論じ，極大存在時刻を「解の爆発」により特徴付け，解の時間大域的存在を保証する手段としての先験評価（アプリオリ評価）を考える．

5.1 基本設定

前回の内容の復習を兼ね，基本設定を改めて明確にしておこう[1~3]．X をバナッハ空間とし U を X の空でない開集合とする．$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，積空間 $\mathbb{R} \times X$ の部分集合 $I \times U$ 上定義された写像 $f : I \times U \to X$ による相速度場に従う相点の運動方程式

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I \tag{5.1}$$

を初期時刻 t_0 において与えられたデータ $u_0 \in U$ の下で考える．微分方程式 (5.1) を初期条件 $u(t_0) = u_0$ の下に，端点 t_0 から時間積分すると，積分方程式

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in I \tag{5.2}$$

が得られる．相速度場がリプシッツ条件を満たす連続写像の場合，(5.2) の局所解の存在と一意性は，初期状態 $(t_0, u_0) \in I \times U$ の適当な閉近傍上で定まるある閉部分集合 $\mathscr{F} \subset C([t_0 - a, t_0 + a]; X)$ において，(5.2) の右辺が $u \in \mathscr{F}$ についての縮小写像をなすことから，バナッハの不動点定理によって示される．リプシッツ条件を外した連続相速度場に対しては，その像の（弱）点列コンパクト性の条件の下で，(5.2) の右辺から定まる折線近似列の同等一様連続性より，アスコリ・アルツェラの定理によって (5.2) の局所解の存在が示される（この論法は一意性を保障するものではない）．

5.2 リプシッツ連続相速度場の場合

この節では連続写像 $f: I \times X \to X$ が**リプシッツ条件**を満たす場合，即ち $L > 0$ が存在し任意の $(t,u),(t,v) \in I \times X$ に対し不等式

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \le L\|u - v\| \tag{L}$$

が成り立つ場合を考える．

定理 5.1（リプシッツ連続相速度場の下での大域解の存在と一意性）連続写像 $f: I \times X \to X$ はリプシッツ条件を満たすものとし $t_0 \in I$ および $u_0 \in X$ を与える．このとき $u \in C^1(I;X)$ が一意的に存在し，初期条件 $u(t_0) = u_0$ および方程式 (5.1) を任意の $t \in I$ に対し満たす．また t_0 を含む I の任意の有界閉区間 J に対し u は評価

$$\|u(t) - u_0\| \le \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

を任意の $t \in J$ で満たす．ここに $M = M(J) = \sup\{\|f(t,u_0)\|; t \in J\}$.

（証明）　閉区間 I に対し有界閉区間の増大列 $\{J_n\}$ で $I = \bigcup_{n\ge1} J_n$ となるものを取る（例えば $J_n = \{t \in I; |t| \le n, \mathrm{dist}(t, \mathbb{R}\setminus I) \ge 1/n\}$）．以下では $t_0 \in J_n$ なる J_n の一つを任意に取り J として固定し $T = \sup\{|t - t_0|; t \in J\}$ と置く．区間 J 上で定理を示せば充分である．以下，4段階に分けて証明を進めていく．

第1段　任意の $\varepsilon > 0$ および $u \in C(J;X)$ に対し

$$|||u|||_\varepsilon = \sup\{e^{-(1+\varepsilon)L|t-t_0|}\|u(t)\|; t \in J\}$$

と置く．このとき $|||\cdot|||_\varepsilon$ は $C(J;X)$ 上のノルムとなり $C(J;X)$ にノルム $|||\cdot|||_\varepsilon$ を与えたノルム空間 $\mathscr{X}$ は完備となる．$C(J;X)$ の部分集合

$$\mathscr{F} = \left\{u \in C(J;X); \text{任意の } t \in J \text{ に対し } \|u(t) - u_0\| \le \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)\right\}$$

は $\mathscr{X}$ の閉集合である．

第2段　$u \in \mathscr{F}$ に対し $\Phi(u): J \to X$ を (5.2) の右辺で定めると $\Phi(u) \in \mathscr{F}$ となることを示す．

$u \in \mathscr{F}$ に対し $J \ni t \mapsto f(t,u(t)) \in X$ は連続であるから $\Phi(u) \in C(J;X)$ となる．また

$$\begin{aligned}||f(t',u(t'))|| &\le ||f(t',u_0)|| + ||f(t',u(t')) - f(t',u_0)|| \\ &\le M + L||u(t') - u_0|| \le M + M\big(e^{L|t'-t_0|} - 1\big) = Me^{L|t'-t_0|}\end{aligned}$$

より

$$||(\Phi(u))(t) - u_0|| \le M\left|\int_{t_0}^{t} e^{L|t'-t_0|}dt'\right| = \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

を得るので $\Phi(u) \in \mathscr{F}$ が従う．

第3段　$\Phi: \mathscr{F} \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathscr{F}$ は $\mathscr{X}$ における距離 $d(u,v) = |||u - v|||_\varepsilon$ に関し縮小写像となる．また，Φ の不動点 $u \in \mathscr{F}$ は初期値問題 (5.1) の $C^1(J;X)$ に属す解である．これらを示す．

$u, v \in \mathscr{F}, t \in J$ に対し

$$\|(\Phi(u) - \Phi(v))(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(t', u(t')) - f(t', v(t')))dt' \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(t', u(t')) - f(t', v(t'))\| dt' \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|u(t') - v(t')\| dt' \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} e^{(1+\varepsilon)Lt' - t_0} |||u - v|||_{\varepsilon} dt' \right| = \frac{1}{1+\varepsilon}(e^{(1+\varepsilon)L|t-t_0|} - 1)|||u - v|||_{\varepsilon}$$

を得る．これより

$$|||\Phi(u) - \Phi(v)|||_{\varepsilon} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}|||u - v|||_{\varepsilon}$$

が従い Φ は縮小写像となる．ゆえに Φ は $\mathscr{F}$ 内に不動点 u を持つ．Φ の不動点 u は $u \in \mathscr{F} \subset C(J; X)$ であり積分方程式 (5.2) を J 上で満たす．さて，J の内点 $t \in \mathrm{Int}\, J$ を取る．$t + h \in \mathrm{Int}\, J$ なる任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) - hf(t, u(t)) &= \int_{t}^{t+h} f(t', u(t'))dt' - hf(t, u(t)) \\ &= \int_{t}^{t+h} (f(t', u(t')) - f(t, u(t)))dt' \end{aligned}$$

と変形すると

$$\|u(t+h) - u(t) - hf(t, u(t))\| \leq |h| \sup_{|t'-t| \leq |h|} \|f(t', u(t')) - f(t, u(t))\| = o(|h|)$$

を得るので u は $\mathrm{Int}\, J$ 上微分可能であり

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, t_0 + T)$$

を満たす．右辺は J 上連続なので $u \in C^1(J; X)$ となる．

第 4 段　一意性は前回の局所解の議論より従う．

以上により，定理が示された．

5.3 局所リプシッツ連続相速度場の場合

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし U をバナッハ空間 X の開集合とする．写像 $f : I \times U \to X$ が**局所リプシッツ条件**を満たすとは任意の $(t_0, u_0) \in I \times U$ に対し $r, L > 0$ が存在し $[t_0 - r,\ t_0 + r] \times \overline{B(u_0; r)} \subset I \times U$ かつ

$$||f(t, u) - f(t, v)|| \leq L||u - v|| \qquad (\mathrm{L_{loc}})$$

が任意の $(t, u), (t, v) \in [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B(u_0; r)}$ に対して成り立つことと定義する．

定理 5.2（局所リプシッツ連続相速度場の下での極大解の存在と一意性）　連続写像 $f : I \times U \to X$ は局所リプシッツ条件を満たすものとする．いま，$t_0 \in I$ および $u_0 \in U$ を与える．このとき開区間 $(T_-, T_+) \subset I$ および

$u \in C^1((T_-, T_+); X)$ が存在し $u((T_-, T_+)) \subset U$, $u(t_0) = u_0$ および微分方程式 (5.1) を任意の $t \in (T_-, T_+)$ に対し満たす．このような u は唯一つである．さらに次が成り立つ．

(1) $T_+ < \sup I$ ならば $K \subset U$ なる任意のコンパクト集合 K および任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_+ - \varepsilon, T_+)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる．

(2) $T_- > \inf I$ ならば $K \subset U$ なる任意のコンパクト集合 K および任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_-, T_- + \varepsilon)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる．

系 5.1　定理で与えられる $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ を極大解とする．コンパクト集合 $K_+ \subset U$ および $\varepsilon_+ > 0$ が存在し $u((T_+ - \varepsilon_+, T_+)) \subset K_+$ となっているとすれば $T_+ = \sup I$ である．コンパクト集合 $K_- \subset U$ および $\varepsilon_- > 0$ が存在し $u((T_-, T_- + \varepsilon_-)) \subset K_-$ となっているとすれば $T_- = \inf I$ である．

（証明）　以下では初期時刻 t_0 に対し区間 $[t_0, \infty) \cap I$ で考える．区間 $(-\infty, t_0] \cap I$ についての議論も同様である．$(t_0, u_0) \in I \times U$ に対し $r_0 > 0$ が存在し $D_0 \equiv [t_0, r_0] \times \overline{B(u_0; r_0)} \subset I \times U$ かつ f は D_0 上リプシッツ定数 L_0 を持つ．このとき任意の $(t, u) \in D_0$ に対し

$$\begin{aligned}\|f(t,u)\| &\le \|f(t,u) - f(t,u_0)\| + \|f(t,u_0)\| \\ &\le L_0\|u - u_0\| + \|f(t,u_0)\| \le L_0 r_0 + \sup\{\|f(t,u_0)\|; t \in [t_0, r_0]\}\end{aligned}$$

より

$$M_0 = \sup\{||f(t,u)||; (t,u) \in D_0\}$$

は有限値を取る．$M_0 > 0$ として良い．そこで，$T_0 = \min(r_0, r_0/M_0)$ とすれば局所解の存在定理により $u \in C^1([t_0, t_0 + T_0]; X)$ が唯一つ存在して $u([t_0, t_0 + T_0]) \subset U$ および

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [t_0, t_0 + T_0]$$

が成立する．次に $t_1 = t_0 + T_0$ および $u_1 = u(t_1)$ と置く．$(t_1, u_1) \in I \times U$ に対し $r_1 > 0$ が存在し $D_1 \equiv [t_1, r_1] \times \overline{B(u_1; r_1)} \subset I \times U$ かつ f は D_1 上リプシッツ定数 L_1 を持つ．このとき

$$M_1 = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in D_1\}$$

は有限値を取る．$M_1 > 0$ として良い．そこで，$T_1 = \min(r_1, r_1/M_1)$ とすれば局所解の存在定理により $u \in C^1([t_1, t_1 + T_1]; X)$ が唯一つ存在して $u([t_1, t_1 + T_1]) \subset U$ および

$$u(t) = u_1 + \int_{t_1}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [t_1, t_1 + T_1]$$

が成立する．u_1 は $[t_0, t_0 + T_0]$ 上の解 u により

$$u_1 = u(t_1) = u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t', u(t'))dt'$$

と表されるので u を $[t_0, t_1+T_1]$ 上に延長することにより $u \in C^1([t_0, t_1+T_1]; X)$ が得られ $u([t_0, t_1+T_1]) \subset U$ および

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [t_0, t_1+T_1]$$

が成立する．以下同様にして狭義増加列 $\{t_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ と正の実数列 $\{r_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \{M_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \{T_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ および任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $u \in C^1([t_0, t_n+T_n]; X)$ が存在し $u_n = u(t_n)$, $D_n \equiv [t_n, t_n+r_n] \times \overline{B(u_n; r_n)} \subset I \times U$ となり f は D_n 上リプシッツ定数 L_n を持ち

$$M_n = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in D_n\},$$
$$T_n = \min(r_n, r_n/M_n), \quad u([t_0, t_n+T_n]) \subset U,$$
$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [t_0, T_n+T_n]$$

が成り立つ．そこで $T_+ = t_0 + \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ と置くと $u \in C^1([t_0, T_+); X)$,

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [t_0, T_+),$$

$u([t_0, T_+)) \subset U$ が成り立つ．このとき次の 2 つのうちのいずれか一つが成り立つ．

(i) $T_+ = \sup I$.　(ii) $T_+ < \sup I$.

(ii) の場合に (1) を示そう．コンパクト集合 K_0 および $\varepsilon_0 > 0$ が存在し任意の $t \in (T_+ - \varepsilon_0, T_+)$ に対し $u(t) \in K_0$ であるとする．$T_+ < \infty$ であるから $\{T_n\}$ は 0 に収束し単調増加列 $\{t_n\}$ は T_+ に収束する．$\{u(t_n)\} \subset K_0$ で K_0 は点列コンパクトであるから $v_0 \in K$ および部分列 $\{u(t_{n_j}); j \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ が存在し $u(t_{n_j}) \to v_0$ $(j \to \infty)$ となる．$0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0/2$ なる ε_1 が存在して $J \equiv [T_+ - \varepsilon_1, T_+ + \varepsilon_1] \subset I$ となる．$J \times K$ は $I \times U$ のコンパクト部分集合であるから

$$M \equiv \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in J \times K\}$$

は有限である．任意の $t, s \in (T_+ - \varepsilon_1, T_+)$ に対し

$$\|u(t) - u(s)\| = \left\| \int_{s}^{t} f(t', u(t'))dt' \right\| \leq M|t-s|$$

となるから $s = t_{n_j}$ と置き $j \to \infty$ とすると

$$\|u(t) - v_0\| \leq M|t - T_+|$$

が成り立つ．これより $u(t) \to v_0$ $(t \uparrow T_+)$ が従う．

さて $(T_+, v_0) \in I \times U$ であるから $r' > 0$ が存在して $D' \equiv [T_+, T_+ + r'] \times \overline{B(v_0; r')} \subset I \times U$ かつ f は D' 上リプシッツ定数 L' を持つ．このとき

$$M' \equiv \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in D'\}$$

は有限である．$M' > 0$ として良い．$T' = \min(r', r'/M')$ とすれば局所解の存在定理により $u \in C^1([T_+, T_+ + T']; X)$ が唯一つ存在して $u([T_+, T_+ + T']) \subset U$

および

$$u(t) = v_0 + \int_{T_+}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in [T_+, T_+ + T']$$

が成立する．従って $[t_0, T_+)$ 上で定義された極大解は $[t_0, T_+ + T']$ に延長されることになる．これは矛盾である．

5.4 狭義局所リプシッツ連続相速度場の場合

前節の局所リプシッツ条件を強めた狭義局所リプシッツ条件を導入しよう．$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし $U \subset X$ を開集合とする．写像 $f : I \times U \to X$ が**狭義局所リプシッツ条件**を満たすとは I の任意の有界閉区間 J および U の任意の有界閉集合 K に対し $L > 0$ が存在し

$$||f(t,u) - f(t,v)|| \le L||u - v|| \qquad (\mathrm{L}'_{\mathrm{loc}})$$

が任意の $(t,u),(t,v) \in J \times K$ に対して成り立つことと定義する．

定理 5.3（狭義局所リプシッツ連続相速度場の下での極大解の存在と一意性）連続写像 $f : I \times U \to X$ は狭義局所リプシッツ条件を満たすものとする．$t_0 \in I$ および $u_0 \in U$ を与える．このとき開区間 $(T_-, T_+) \subset I$ および $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ が存在し $u((T_-, T_+)) \subset U$, $u(t_0) = u_0$ および微分方程式 (5.1) を任意の $t \in (T_-, T_+)$ に対し満たす．このような u は唯一つである．さらに次が成り立つ．

(1) $T_+ < \sup I$ ならば $K \subset U$ なる任意の有界閉集合 K および任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_+ - \varepsilon, T_+)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる．

(2) $T_- > \inf I$ ならば $K \subset U$ なる任意の有界閉集合 K および任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_-, T_- + \varepsilon)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる．

系 5.2　定理で与えられる $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ を極大解とする．有界閉集合 $K_+ \subset U$ および $\varepsilon_+ > 0$ が存在し $u((T_+ - \varepsilon_+, T_+)) \subset K_+$ となっているとすれば $T_+ = \sup I$ である．有界閉集合 $K_- \subset U$ および $\varepsilon_- > 0$ が存在し $u((T_-, T_- + \varepsilon_-)) \subset K_-$ となっているとすれば $T_- = \inf I$ である．

（証明）　前半は定理 5.2 の証明と全く同じである．後半の (ii) の場合に (1) を示せば充分である．有界閉集合 K_0 および $\varepsilon_0 > 0$ が存在し任意の $t \in (T_+ - \varepsilon_0, T_+)$ に対し $u(t) \in K_0$ であるとする．$T_+ < \infty$ であるから $\{T_n\}$ は 0 に収束し単調増加列 $\{t_n\}$ は T_+ に収束する．$0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ なる ε_1 が存在して $J \equiv [T_+ - \varepsilon_1, T_+ + \varepsilon_1] \subset I$ となる．狭義局所リプシッツ条件より f は $J \times K_0$ 上リプシッツ定数 L' を持つ．任意の $(t,u) \in J \times K_0$ に対し

$$\begin{aligned}
\|f(t,u)\| &\le \|f(t,u) - f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| + \|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| \\
&\le L'\|u - u(T_+ - \varepsilon_1)\| + \|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| \\
&\le 2L' \sup\{\|u\|; u \in K\} + \sup\{\|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\|; t \in J\}
\end{aligned}$$

より

$$M' = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in J \times K_0\}$$

は有限である．任意の $t, s \in (T_+ - \varepsilon_1, T_+)$ に対し

$$\|u(t) - u(s)\| = \left\| \int_s^t f(t', u(t'))dt' \right\| \leq M'|t-s|$$

となるから $t = t_m, s = t_n, m > n \to \infty$ とすれば

$$\|u_m - u_n\| \leq M'|t_m - t_n| \to 0$$

となる．完備性より $v_0 \in K_0$ が存在し $u_n \to v_0$ $(n \to \infty)$ となる．上の不等式で $s = t_n$ とし $n \to \infty$ とすれば

$$\|u(t) - v_0\| \leq M|t - T_+|$$

が従う．これより定理 5.2 の証明と同じ議論で矛盾を得る．

定理 5.4（大域的に定義された狭義局所リプシッツ連続相速度場の下での極大解の存在と一意性） 連続写像 $f : \mathbb{R} \times X \to X$ は狭義局所リプシッツ条件を満たすものとする．$t \in \mathbb{R}$ および $u_0 \in X$ を与える．このとき開区間 $(T_-, T_+) \subset \mathbb{R}$ および $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ が存在し $u(t_0) = u_0$ および微分方程式 (5.1) を任意の $t \in (T_-, T_+)$ に対し満たす．このような u は唯一つである．さらに次が成り立つ．

(1) $T_+ < \infty$ ならば $\lim_{t \uparrow T_+} \|u(t)\| = \infty$.
(2) $T_- > -\infty$ ならば $\lim_{t \downarrow T_-} \|u(t)\| = \infty$.

（証明） 定理 5.3 の (1) より，$T_+ < \infty$ ならば任意の $R > 0$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対し（$K = \{u \in X; \|u\| \leq R\}$ と置けば）$T_+ - \varepsilon < t < T_+$ なる t が存在し $\|u(t)\| > R$ となる．解の連続性より $\varepsilon' > 0$ が存在し $T_+ - \varepsilon' < t < T_+$ なる任意の t に対し $\|u(t)\| > R$ が従う．これより (1) を得る．同様に (2) も従う．

以下では簡単のため $t_0 = 0$ とし $t \geq 0$ の場合のみを対象として議論する．大域解の存在のための充分条件として相速度場に対する**一次増大条件**を考える：

局所可積分関数 $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在し任意の $(t, u) \in [0, \infty) \times X$ に対し次の評価が成立する：

$$\|f(t,u)\| \leq M(t)(\|u\| + 1). \tag{LG}$$

条件 (LG) の下で定理 5.4 で与えられる解 $u \in C^1([0, T_+); X)$ の $t \uparrow T_+$ における挙動を調べよう．$t \in [0, T_+)$ に対し $\varphi(t) = \|u(t)\|$ と置くと φ は積分不等式

$$\varphi(t) \leq \|u_0\| + \int_0^t M(t')(\varphi(t') + 1)dt', \quad t \in [0, T_+)$$

を満たすことが分かる．このとき，グロンウォールの補題により φ の評価

$$\varphi(t) \le \exp\left(\int_0^t M(t')dt'\right)(\|u_0\|+1)-1, \quad t \in [0, T_+)$$

を得る．これにより

$$\sup_{0\le t<T_+} \|u(t)\| \le \exp\left(\int_0^{T_+} M(t')dt'\right)(\|u_0\|+1)-1<\infty$$

を得るので $T_+=\infty$ が従う．条件 (LG) は対数関数的補正を施した (LlogLG) に拡張される：

局所可積分関数 $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在し任意の $(t,u)\in[0,\infty)\times X$ に対し次の評価が成立する：

$$\|f(t,u)\| \le M(t)(1+\log(\|u\|+1))(\|u\|+1). \qquad \text{(LlogLG)}$$

この場合 φ は積分方程式

$$\varphi(t) \le \|u_0\| + \int_0^t M(t')(1+\log(\varphi(t')+1))(\varphi(t')+1)dt'$$

を満たす．右辺に現れる積分を t の関数として $F(t)$ と表せば

$$\begin{aligned} F'(t) &= M(t)(1+\log(\varphi(t)+1))(\varphi(t)+1) \\ &\le M(t)(1+\log(\|u_0\|+1+F(t)))(\|u_0\|+1+F(t)) \end{aligned}$$

を得る．これより

$$\frac{d}{dt}\log(1+\log(\|u_0\|+1+F)) = \frac{1}{1+\log(\|u_0\|+1+F)}\cdot\frac{F'}{\|u_0\|+1+F} \le M(t)$$

の両辺を積分し対数を外すことで

$$\varphi(t) \le \|u_0\|+F(t) \le \exp(1+\log(\|u_0\|+1))\exp\left(\int_0^t M(t')dt'\right)-1$$

を得る．これにより

$$\sup_{0\le t<T_+}\|u(t)\| \le \exp((1+\log(\|u_0\|+1))\exp\left(\int_0^{T_+} M(t')dt'\right)-1<\infty$$

を得るので $T_+=\infty$ が従う．グロンウォールの補題の対数補正はブレジス・ガルエの論法の後半で重要な役割を果たす[4]．もう一段の補正は

$$M(t)(1+\log(1+\log(1+\|u\|)))(1+\log(1+\|u\|))(1+\|u\|)$$

で与えられ，さらに任意の有限回の補正を考えることもできる．可算回の補正には無限乗積を用いれば良い[5,6]．

参考文献

1) 大谷光春，『理工基礎　常微分方程式論』，サイエンス社．
2) 白石謙一，『力学系の理論』，岩波書店．
3) 白石謙一，『常微分方程式論序説』，サイエンス社．
4) H. Brezis, T. Gallouet, *Nonlinear Analysis TMA* **4** (1980), 677–681.
5) H. Ando, T. Horiuchi, E. Nakai, *Sci. Math. Jpn.* **75** (2012), 187–201.
6) K. Fujiwara, T. Ozawa, *JMSJ* (in press).

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第13回

曲面について (2)

森田　茂之

13.1 ガウス曲率

前回の復習から始める．S を xyz 空間すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の曲面とする．V を S の開集合とし，uv 平面上の開集合 U から V への 1 対 1 写像が

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

の形で与えられていて，局所座標の役割を果たしているものとする．このとき，V 上の各点は

$$\mathrm{P}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

と表示できるが，簡単のためにこれを $\mathrm{P}(u, v)$ と記すことにする．さて，点 $\mathrm{P}(u, v)$ における曲面 S への接平面を T_{P} としよう．T_{P} を P を始点とし S に接するベクトル全体のなす 2 次元の実ベクトル空間と見なせば，2 つのベクトル

$$\boldsymbol{t}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \boldsymbol{t}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

は，T_{P} の基底となる．したがって，任意の接ベクトル $\boldsymbol{x} \in T_{\mathrm{P}}$ は

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{t}_u + \beta \boldsymbol{t}_v \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

と一意的に表すことができる．3 つの実数 E, F, G を

$$E = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_u) = |\boldsymbol{t}_u|^2, \quad F = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v), \quad G = (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_v) = |\boldsymbol{t}_v|^2$$

により定義すれば，$\boldsymbol{x}$ の長さは二次形式

$$|\boldsymbol{x}|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

によって表される．これを第一基本形式というのであった．

次に，点 P における法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし

$$\boldsymbol{t}_{uu} = (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}), \quad \boldsymbol{t}_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}), \quad \boldsymbol{t}_{vv} = (x_{vv}, y_{vv}, z_{vv})$$

とおく．3 つの実数 L, M, N を

$$L = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}), \quad M = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uv}), \quad N = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{vv})$$

により定義する．このとき，T_{P} 上の二次形式

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{t}_u + \beta \boldsymbol{t}_v \in T_{\mathrm{P}})$$

を第二基本形式と呼び，その係数行列の行列式 $LN - M^2$ の符号（正，0，負）により，曲面の曲がり具合が定性的に 3 種類（楕円的，放物的，双曲的）に分類されるのであった．

ここで L, M, N のもう一つの表示を与えておく．$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_u) = 0$ を u で偏微分すれば $(\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{t}_u) + (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}) = 0$ から $L = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}) = -(\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{t}_u)$ が得られる．同様にして次の表示が得られる．

$$L = -(\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{t}_u), \quad M = -(\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{t}_v) = -(\boldsymbol{n}_v, \boldsymbol{t}_u), \quad N = -(\boldsymbol{n}_v, \boldsymbol{t}_v). \quad (13.1)$$

さて，第二基本形式の行列式と第一基本形式の行列式との比

$$K(\mathrm{P}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

を考えると，これは局所座標の取り方によらないものとなることが分かる．結論から先にいえば，これが P における**ガウス曲率**（Gaussian curvature）と呼ばれるもので，曲面の曲がり具合を定量的に表す不変量となるのである．

この量の幾何学的意味は，すでにある程度示されているが，空間曲線の曲率との関係を簡単に記すと次のようになる．xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ の中に曲線 C が与えられているものとする．C を時間 t をパラメータとして

$$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

と表そう．このとき速度ベクトルは

$$\boldsymbol{p}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

となり，したがって $t = 0$ から $t = t$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{p}'(t)| dt$$

となる．任意の t において $|\boldsymbol{p}'(t)| \neq 0$ とすれば，t は s の関数 $t = t(s)$ と

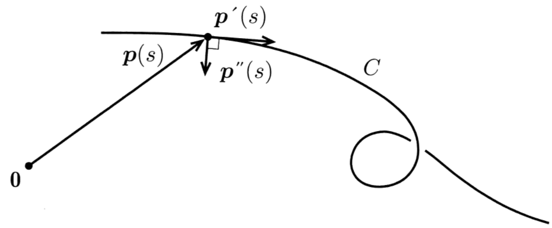


図 13.1　弧長をパラメータとする空間曲線.

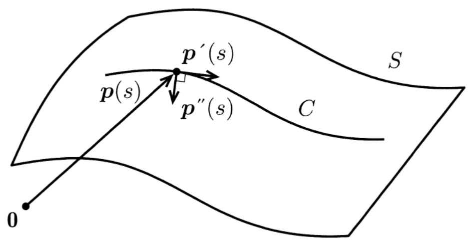


図 13.2　曲面上の曲線.

して表すことができる．そこで，初めから C を弧長 s をパラメータとして $\boldsymbol{p}(s)$ と表すことにする．このとき速度ベクトル $\boldsymbol{p}'(s)$ の長さは常に 1，すなわち $|\boldsymbol{p}'(s)| = 1$ となる．$\boldsymbol{p}'(s)$ を s に関してもう一度微分して得られるベクトル $\boldsymbol{p}''(s)$ は加速度ベクトルであるが，$(\boldsymbol{p}'(s), \boldsymbol{p}'(s)) = 1$ を微分すれば分かるように $\boldsymbol{p}''(s)$ は $\boldsymbol{p}'(s)$ と直交するベクトルとなる（図 13.1 参照）．加速度ベクトルの長さ

$$\kappa(s) = |\boldsymbol{p}''(s)|$$

を空間曲線 C の点 $\boldsymbol{p}(s)$ における**曲率**という．

次に図 13.2 に示すように，$\mathbb{R}^3$ の中の曲面 S 上に曲線 C が乗っている場合を考えよう．S のある開集合で定義された局所座標 (u, v) を使えば，C 上の点は $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ と表すことができる．このとき，速度ベクトル $\boldsymbol{p}'(s)$ は S への接ベクトルとなる．すなわち，$\boldsymbol{p}(s)$ における接平面を $T_{\boldsymbol{p}(s)}$ とすれば

$$\boldsymbol{p}'(s) \in T_{\boldsymbol{p}(s)}$$

となる．しかし加速度ベクトル $\boldsymbol{p}''(s)$ は $\boldsymbol{p}'(s)$ と直交するが $T_{\boldsymbol{p}(s)}$ に属するとは限らない．そこで

$$\boldsymbol{p}''(s) = \kappa_g + \kappa_n$$

と接平面方向の成分 $\kappa_g \in T_{\boldsymbol{p}(s)}$ と，長さ 1 の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向の成分 κ_n の直和に分解しておく．κ_g, κ_n をそれぞれ C の $\boldsymbol{p}(s)$ における**測地的曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**という．また $\kappa_g \equiv 0$ となる曲線を**測地線**といい，$\kappa_n = \kappa_n \boldsymbol{n}$ で定まる定数 κ_n を**法曲率**という．

さて

$$\kappa_n = \kappa_n(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = (\kappa_n, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{p}''(s) - \kappa_g, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{p}''(s), \boldsymbol{n})$$

であるが，一方 $(\boldsymbol{p}'(s), \boldsymbol{n}) = 0$ を微分すれば $(\boldsymbol{p}''(s), \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{p}'(s), \boldsymbol{n}') = 0$ となる．したがって

$$\kappa_n = -(\boldsymbol{p}'(s), \boldsymbol{n}')$$

となることが分かる．ところが

$$\boldsymbol{p}'(s) = \boldsymbol{t}_u \frac{du}{ds} + \boldsymbol{t}_v \frac{dv}{ds},$$
$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n}_u \frac{du}{ds} + \boldsymbol{n}_v \frac{dv}{ds}$$

である．したがって，式 (13.1) を使えば

$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\left(\boldsymbol{t}_u \frac{du}{ds} + \boldsymbol{t}_v \frac{dv}{ds}, \boldsymbol{n}_u \frac{du}{ds} + \boldsymbol{n}_v \frac{dv}{ds}\right) \\ &= -(\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{n}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - ((\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{n}_v) + (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{n}_u))\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) - (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{n}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ &= L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\end{aligned}$$

となる．これは第二基本形式の，長さ 1 の接ベクトル $\boldsymbol{p}'(s) \in T_{\boldsymbol{p}(s)}$ における値に他ならない．この式から法曲率 κ_n は速度ベクトル $\boldsymbol{p}'(s)$ のみによることが分かる．そこで，点 $\boldsymbol{p}(s)$ における長さ 1 の接ベクトル全体を $T^1_{\boldsymbol{p}(s)} \subset T_{\boldsymbol{p}(s)}$ と書き，写像

$$\nu : T^1_{\boldsymbol{p}(s)} \to \mathbb{R}$$

を

$\nu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(s)$ における速度ベクトルが $\boldsymbol{x}$ となるような S 上の曲線 C の法曲率

により定義する．$T^1_{\boldsymbol{p}(s)} \subset T_{\boldsymbol{p}(s)}$ はコンパクトで ν は連続であるから，それは最大値・最小値をもつ．これらの値を求めるために，第一基本形式，および第二基本形式が定める $T_{\boldsymbol{p}(s)}$ 上の次の 2 つの関数

$$f_{\mathrm{I}}(\alpha, \beta) = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2,$$
$$f_{\mathrm{II}}(\alpha, \beta) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

を考える．ただし，$T_{\boldsymbol{p}(s)}$ に属するベクトル $\boldsymbol{x}$ は一意的に $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{t}_u + \beta\boldsymbol{t}_v$ と書けるので，$T_{\boldsymbol{p}(s)}$ を α, β を変数とする $\mathbb{R}^2$ と同一視した．さて，第一基本形式，第二基本形式はいずれも二次形式であるから，接ベクトル $\boldsymbol{x}$ を実数倍した $\mu\boldsymbol{x}$ $(\mu \in \mathbb{R})$ における $f_{\mathrm{I}}, f_{\mathrm{II}}$ の値は，どちらも μ^2 倍となる．したがって

$$\lambda = \frac{f_{\mathrm{II}}(\alpha, \beta)}{f_{\mathrm{I}}(\alpha, \beta)}$$

とおいて，この値の $T_{\boldsymbol{p}(s)} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の最大値・最小値を求めればよい．あるい

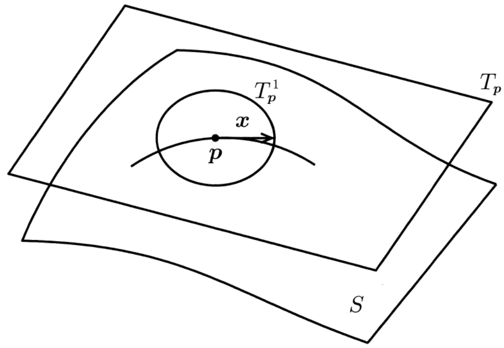


図 13.3　法曲率の最大最小.

は，関数 f_{II} の，条件 “$f_{\mathrm{I}} = 1$” 付きの極値を求める問題と考えてもよい．ここでラグランジュ乗数法を適応すれば，$f_{\mathrm{II}}(\alpha, \beta) = \lambda f_{\mathrm{I}}(\alpha, \beta)$ から，λ に関する条件

$$\operatorname{grad} f_{\mathrm{II}} = \lambda \operatorname{grad} f_{\mathrm{I}}$$

が得られる．

$$\operatorname{grad} f_{\mathrm{II}} = (2L\alpha + 2M\beta, 2M\alpha + 2N\beta),$$
$$\operatorname{grad} f_{\mathrm{I}} = (2E\alpha + 2F\beta, 2F\alpha + 2G\beta)$$

であるから，次の連立 1 次方程式が得られる．

$$(L - \lambda E)\alpha + (M - \lambda F)\beta = 0,$$
$$(M - \lambda F)\alpha + (N - \lambda G)\beta = 0.$$

これが自明でない解（すなわち $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ となる解）をもつ必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0$$

となることである．これを書き換えると

$$(EG - F)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0$$

となる．この 2 次方程式の解が，求める法曲率の最大値と最小値である (図 13.3)．これらを**主曲率**という．そして，それらの積は

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

となるが，これがすなわちガウス曲率 $K(\mathrm{P})$ の定義である．こうしてガウス曲率の幾何学的意味を示すことができた．

例題 13.1　$\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 r の球面

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

のガウス曲率を求めよ．

解答 前回（例題 12.1）と同様，局所座標として

$$x = u,\quad y = v,\quad z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

を採用すれば，接ベクトルは

$$\boldsymbol{t}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right),$$
$$\boldsymbol{t}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)$$

となり，したがって第一基本形式は

$$E = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_u) = 1 + \frac{u^2}{r^2 - u^2 - v^2},$$
$$F = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v) = \frac{uv}{r^2 - u^2 - v^2},$$
$$G = (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_v) = 1 + \frac{v^2}{r^2 - u^2 - v^2}$$

となる．これから

$$EG - F^2 = \frac{r^2}{r^2 - u^2 - v^2}$$

が得られる．一方，法線ベクトルは簡単な考察から

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{1}{r}(u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$$

となることが分かる．したがって，第二基本形式は

$$L = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}) = -\frac{1}{r} - \frac{u^2}{r(r^2 - u^2 - v^2)},$$
$$M = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uv}) = -\frac{uv}{r(r^2 - u^2 - v^2)},$$
$$N = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{vv}) = -\frac{1}{r} - \frac{v^2}{r(r^2 - u^2 - v^2)}$$

で与えられ，その係数行列の行列式は

$$LN - M^2 = \frac{1}{r^2 - u^2 - v^2}$$

となる．したがって，求めるガウス曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}$$

となる．

例題 13.2 曲面

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = xy\}$$

のガウス曲率を求めよ．

解答 前回（例題 12.3）と同様，局所座標として

$$x = u,\quad y = v,\quad z = uv$$

を採用すれば

$$\boldsymbol{t}_u = (1, 0, v),\quad \boldsymbol{t}_v = (0, 1, u)$$

から，第一基本形式は

$$E = 1 + v^2,\quad F = uv,\quad G = 1 + u^2$$

で与えられる．また

$$\boldsymbol{t}_{uu} = (0, 0, 0),\quad \boldsymbol{t}_{uv} = (0, 0, 1),\quad \boldsymbol{t}_{vv} = (0, 0, 0)$$

となる．これも前回（例題 12.5）に求めたように，法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right)$$

であるから，第二基本形式は

$$L = 0,\quad M = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\quad N = 0$$

で与えられる，したがって，求めるガウス曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

となる．

例題 13.3 一葉双曲面

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

のガウス曲率を求めよ．

解答 これも前回（例題 12.2）と同様，この曲面の局所座標を

$$x = \cosh u \cos v,\quad y = \cosh u \sin v,\quad z = \sinh u$$

により定義すれば，接ベクトルは

$$\boldsymbol{t}_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u),$$
$$\boldsymbol{t}_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

となる．したがって第一基本形式は

$$E = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_u) = \sinh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u = \sinh^2 u + \cosh^2 u,$$
$$F = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v) = 0,$$
$$G = (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_v) = \cosh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v = \cosh^2 u$$

となる．これから

$$EG - F^2 = \cosh^2 u(\cosh^2 u + \sinh^2 u)$$

が分かる．

次に第二基本形式を求める．まず

$$\boldsymbol{t}_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u),$$
$$\boldsymbol{t}_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0),$$
$$\boldsymbol{t}_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

である．次に法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|}$$

を計算しよう．分子のベクトルを仮に $\boldsymbol{w} = (w_x, w_y, w_z)$ と記すと

$$w_x = \begin{vmatrix} \sinh u \sin v & \cosh u \\ \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -\cosh^2 u \cos v,$$

$$w_y = \begin{vmatrix} \cosh u & \sinh u \cos v \\ 0 & -\cosh u \sin v \end{vmatrix} = -\cosh^2 u \sin v,$$

$$w_z = \begin{vmatrix} \sinh u \cos v & \sinh u \sin v \\ -\cosh u \sin v & \cosh u \cos v \end{vmatrix} = \sinh u \cosh u$$

となる．これから

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|^2 &= \cosh^4 u \cos^2 v + \cosh^4 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cosh^2 u \\ &= \cosh^2 u(\cosh^2 u + \sinh^2 u) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} L = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}) &= \frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|} \left(-\cosh^3 u \cos^2 v - \cosh^3 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cosh u\right) \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|} \cosh u(-\cosh^2 u + \sinh^2 u) = -\frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|} \cosh u, \end{aligned}$$

$$M = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uv}) = 0,$$

$$N = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{vv}) = \frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|} \left(\cosh^3 u \cos^2 v - \cosh^3 u \sin^2 v\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|} \cosh^3 u$$

が得られる．これから

$$LN - M^2 = -\frac{1}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|^2} \cosh^4 u$$

が分かる．したがってガウス曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^2}$$

となる．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

2014年 (1月号~12月号) 総目次

Vol. 52, No. 607~Vol. 52, No. 618

特　集(2015 年 2 月号予告)

物理学諸分野の拡がりとつながり

現代物理の全体像を素描する

特　集(2014 年 12 月号)

場と力の物理イメージ

局所性と非局所性からひもとく物理学の姿

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．科学の様々な場面で時間概念が重要なことがよくわかりました．

ところで科学に限らず，私たちの周りには「時間」に関する表現として，“時は金なり” といった諺があります．これは有名な B. フランクリンの言葉だそうですが，広辞苑には「時間は貴重・有効なものだから，むだに費やしてはならない」とあります．まだ先は長いと思ってはいますが，時間は有限であることを肝に銘じ，エネルギーが残っているうちにいろいろなことをやりたいものです．　(R)

*　　*

大人と子供では時間の感じ方が異なるといわれています．確かに，最近時間がたつのを早く感じるようになり，あっという間に本誌も新たな年を迎えました．

大人と子供の時間感覚の違いの理由には諸説あるようですが，大人よりも感受性豊かな子供の感覚では同じ期間でも様々な刺激を受けることで充実した時を過ごせるという話を聞いたことがあります．

もう少し大人にならねばと反省することが多くありますが，色々なことに目を輝かせる少年のような気持ちも持ち続けていくべきかなとも思います．　(T)

数　理　科　学　1月号

2015 年 1 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁